

Guillaume Francois Antoine Marquis de L'Hospital

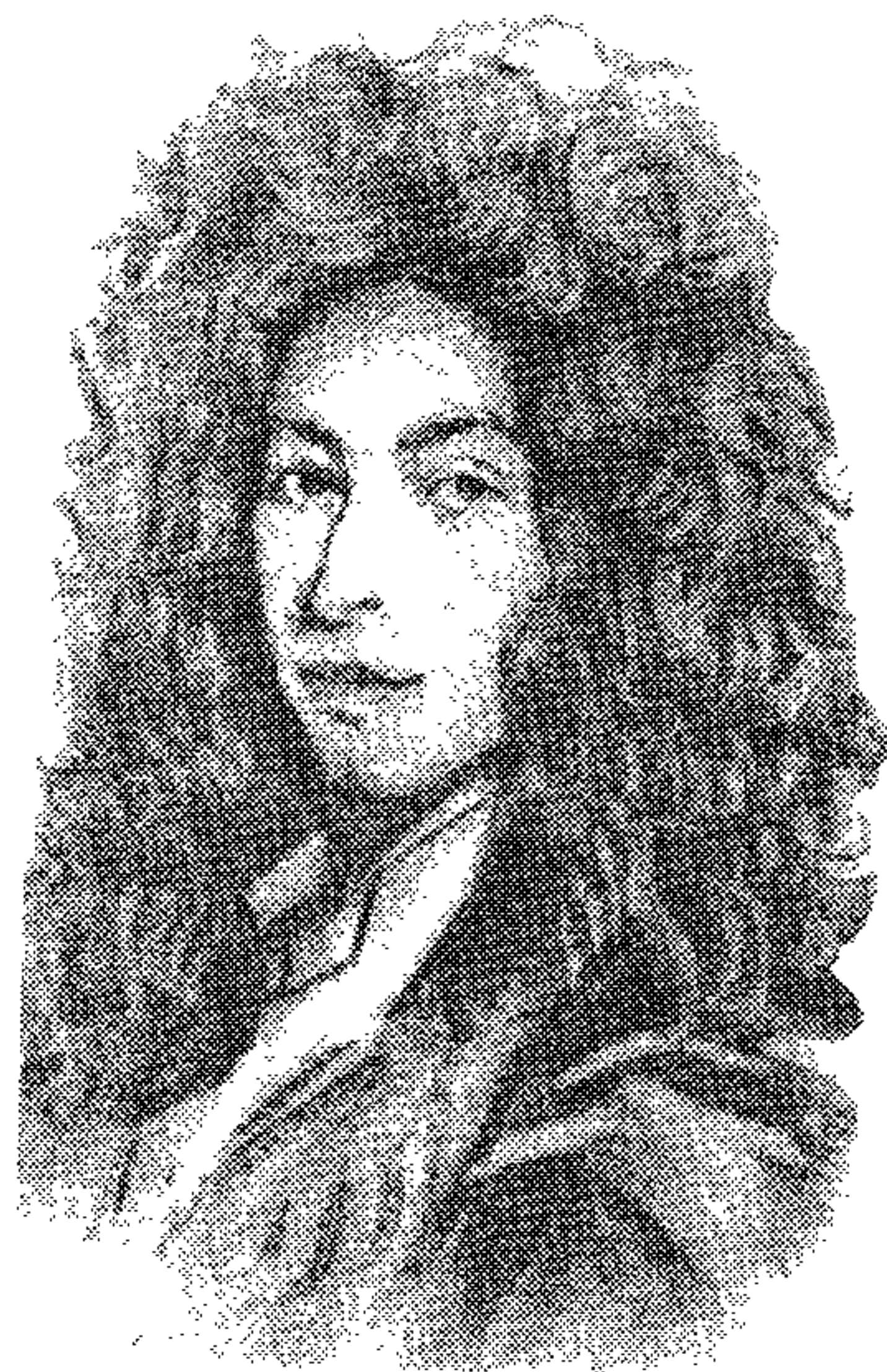
Nació en 1661 en París, Francia. Falleció el 2 de febrero de 1704 en París. L'Hospital escribió el primer libro de cálculo en el año 1696, el cuál estuvo influenciado por las lecturas que realizaba de sus profesores Johann Bernoulli, Jacob Bernoulli y Leibniz.

L'Hospital sirvió como oficial de caballería, pero tuvo que retirarse a causa de su miopía. Desde ese tiempo dirigió su atención hacia las matemáticas y aprendió cálculo de su maestro Johann Bernoulli en 1691. L' Hospital era un competente matemático, su fama se desprende de su libro *"Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes"* (1692).

En este libro creó la regla que ahora se conoce como regla de L'Hospital para encontrar el límite de una función racional, cuyo numerador y denominador tienden a cero.

Regla de L'Hospital

El concepto de derivada que se aplica al caso clásico de la velocidad y la caída de los cuerpos y, un detalle metodológicamente importante, la aplicación de conceptos en las propias matemáticas.



$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

Densidad

La masa de x centímetros del lado izquierdo de una cuerda no homogénea de 10 centímetros de largo es x^2 gramos, como se indica en la figura 1.

Por ejemplo, la parte correspondiente al intervalo $[0; 5]$ sobre la cuerda tiene una masa de $5^2 = 25$ gramos. La masa en el intervalo $[0; 6]$ es $6^2 = 36$ gramos. En consecuencia, la masa en el intervalo $[5; 6]$ es $36 - 25 = 11$ gramos. De manera similar, la masa en el intervalo $[6; 7]$ es $7^2 - 6^2 = 49 - 36 = 13$ gramos. De manera similar, la masa en el intervalo $[6; 7]$ es $7^2 - 6^2 = 49 - 36 = 13$ gramos. ¿Cuál es la densidad, en gramos por centímetro, del material en $x=2$?

SOLUCIÓN Para estimar la densidad de la cuerda a 2 centímetros de su extremo izquierdo, se examina la masa del material en el intervalo corto $[2; 2,1]$. (Véase la figura 2).

El material en el intervalo $[2; 2,1]$ tiene una masa de $2,1^2 - 2^2$ gramos, que es igual a $4,41 - 4 = 0,41$ gramos. Así, la densidad media para este intervalo es $0,41/0,1 = 4,1$ gramos por centímetro.

Mejor que hacer otro estimativo, considérese la densidad en el pequeño intervalo típico $[2; 2+h]$. La masa en este intervalo es $(2+h)^2 - 2^2$ gramos.

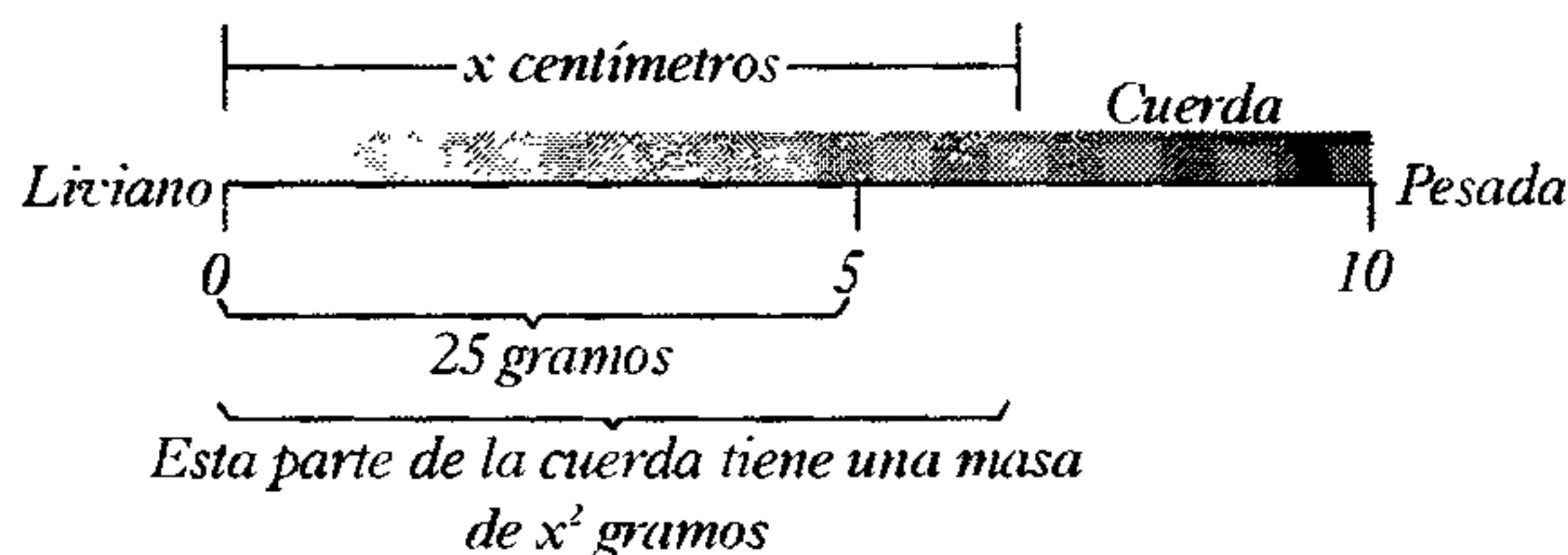


Figura 1

La masa en el intervalo es $2 \cdot 1^2 - 2^2$ gramos.

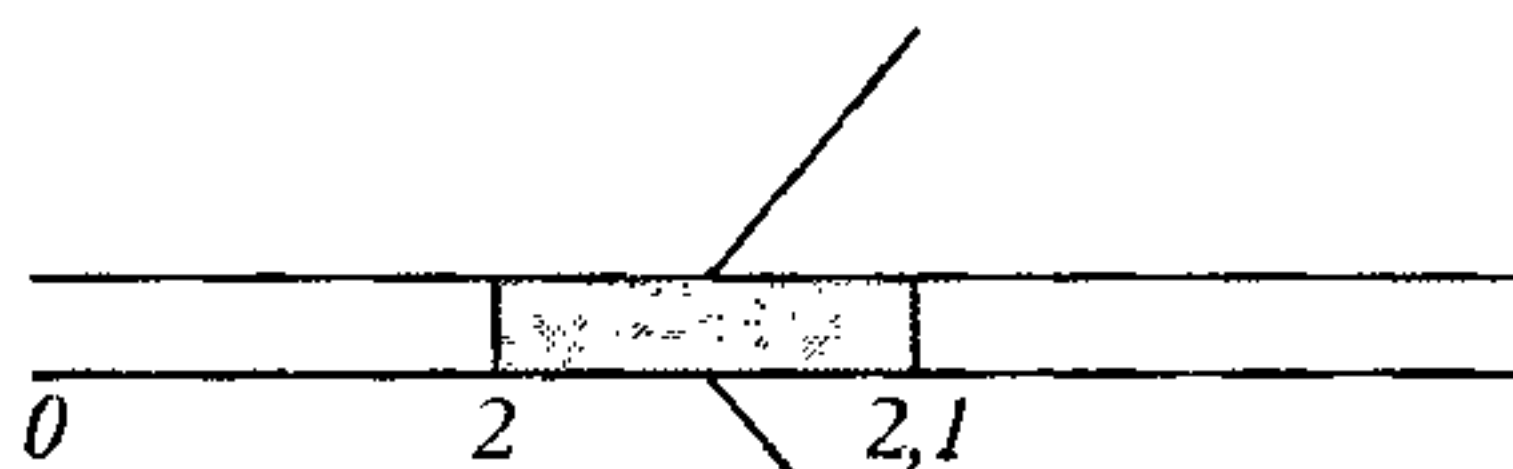


Figura 2

El intervalo tiene longitud h centímetros. Entonces, la densidad de la materia en este intervalo es:

$$\frac{(2+h)^2 - 2^2}{h} = 4 + h \text{ gramos por centímetro}$$

Cuando h se aproxima a 0, este cociente se aproxima a 4, y se dice que la densidad en un punto a 2 centímetros, medidos desde el extremo izquierdo de la cuerda, es de 4 gramos por centímetro.

En términos de límites

$$\text{Densidad en } 2 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^2 - 2^2}{h} = 4$$

Límites

OBJETIVOS

- Desarrollar los principios y fundamentos del estudio de los límites.
- Formar las bases para el análisis matemático.

INTRODUCCIÓN

Bernard Bolzano nació en Praga en 1781. Hijo de un anticuario italiano y de madre alemana, optó por la cátedra de matemática en la universidad.

Fue Bolzano quien presentó rigurosamente la definición de función continua, así como la diferencia entre la continuidad y la diferenciabilidad de una función, en una memoria publicada en 1817, donde aparece su famoso teorema respecto a las funciones continuas sobre un intervalo.

Para tal fin, al igual que B. Augustin Cauchy, se basaba en el concepto de límite; pero a diferencia de éste, Bolzano hizo la distinción entre continuidad y diferenciabilidad, aunque en aquella época todas las funciones continuas eran diferenciables. Creó una función real de variable real continua en un intervalo cerrado y sin derivada en ningún punto, recogió en una memoria denominada "Teoría de Funciones".

Bolzano sistematizó el concepto de función continua, dándole carácter local, e introdujo la continuidad por la izquierda y por la derecha. Su obra no fue conocida hasta fines del siglo XIX, por ello muchos de sus resultados fueron redescubiertos por otros matemáticos.

El 31 de octubre de 1815, nació Karl T. W. Weierstrass en Ostenfelde (Westfalia). A los 14 años inició sus estudios de Bachillerato y consiguió el título de mejor alumno.

En 1834 realizó estudios que le permitieron desarrollar tareas administrativas y de jurisprudencia. Tres años después las abandonó para consagrarse a las matemáticas, definitivamente, desde 1841 a 1854. Trabajó de maestro y, a pesar de su orientación educativa, se dedicó a seguir investigando en matemáticas sin tener contacto con otros colegas de su tiempo. Sus publicaciones le permitieron incorporarse a la Universidad de Berlín, donde sería profesor titular a partir de 1863.

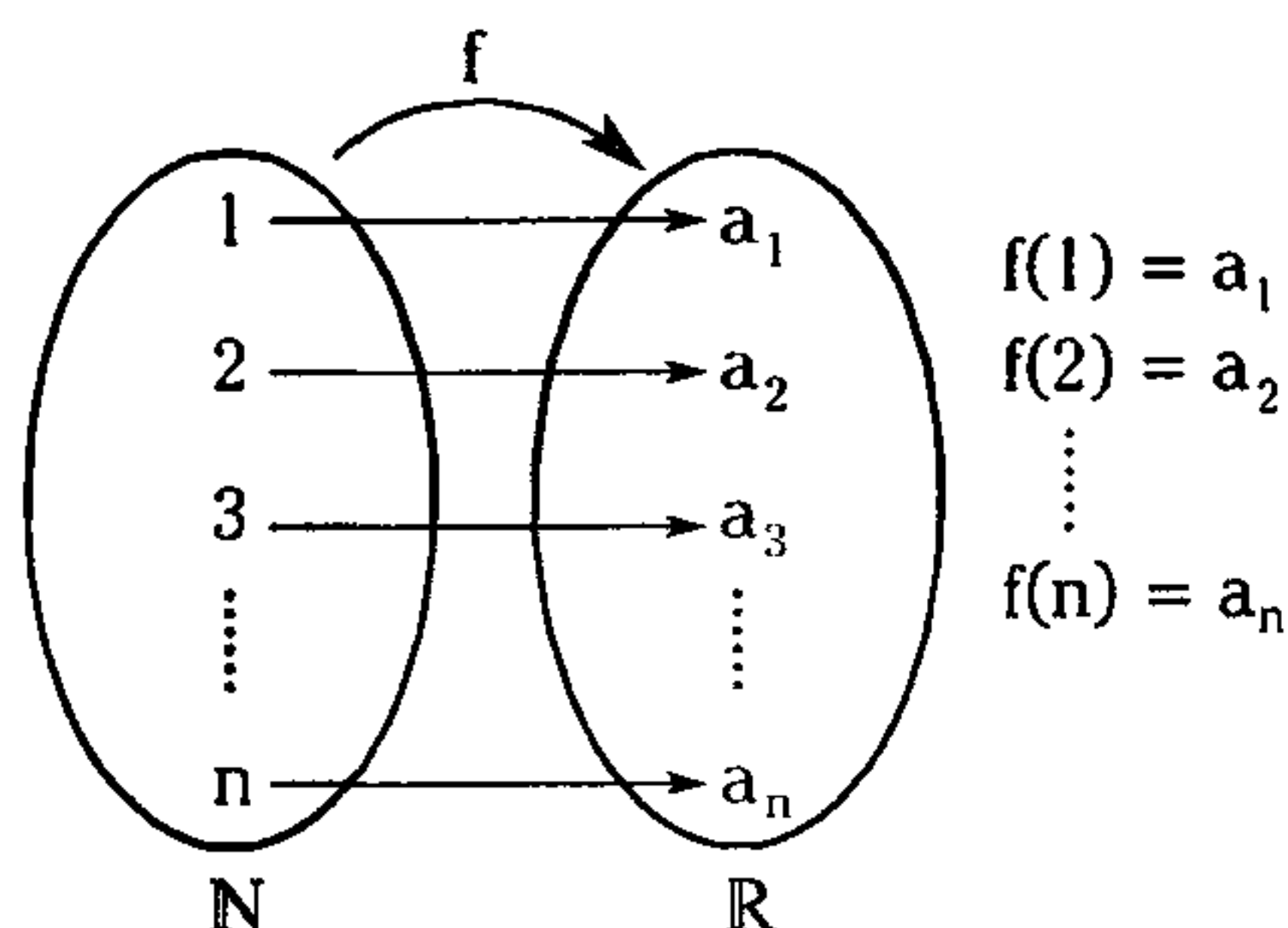
Weierstrass fundamentó el análisis con el máximo rigor posible, sin tener que recurrir a la intuición y, aunque publicó poco, sus enseñanzas en la universidad le otorgaron numerosos discípulos.

Los límites se aplican actualmente en las diferentes ramas de la ciencia; para realizar aproximaciones, cuando no se puede obtener valores exactos; así como también para determinar valores máximos y mínimos que puede asumir una expresión matemática, en cualquiera de sus formas.

DEFINICIONES PREVIAS

SUCESIÓN

Es la imagen de una función cuyo dominio es el conjunto de los números naturales y contradominio los números reales.



Ejemplos:

1. El conjunto de números 2 ; 7 ; 12 ; 17 ; ... ; 32 es una sucesión finita, el término n -ésimo viene dado por $a_n = f(n) = 2 + 5(n-1)$ con $n = 1, 2, 3, \dots, 7$.
2. El conjunto de números 0,6 ; 0,66 ; 0,6666 ; ... es una sucesión de infinitos términos, cuyo término n -ésimo viene dado por:

$$a_n = \frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{10^n} \right)$$

3. El conjunto de números 2 ; 4 ; 16 ; 256 ; ... ; 2^{2^n} que tiene una ley de formación.

$$a_{n+1} = \begin{cases} 2 & \text{si } n = 0 \\ a_n^2 & \text{si } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

TIPOS DE SUCESIONES

1. SUCESIONES ACOTADAS Y NO ACOTADAS

Si el valor absoluto del n -ésimo término de la sucesión $\{a_n\}$ es menor que un número real positivo M , se dice que la sucesión $\{a_n\}$ es acotada (M se llama cota de la sucesión), de lo contrario la sucesión es no acotada. Es decir, $\{a_n\}$ es acotada si y sólo si existe $M > 0$, tal que $|a_n| < M \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

2. SUCESIONES MONÓTONAS

Una sucesión $\{a_n\}$ es monótona decreciente si y sólo si $a_n \geq a_{n+1}$ o bien monótona creciente si y sólo si $a_n \leq a_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

- Si $a_n < a_{n+1}$ la sucesión es estrictamente creciente y si $a_n > a_{n+1}$ la sucesión es estrictamente decreciente.
- Si $a_n \geq a_{n+1}$ la sucesión no es creciente y si $a_n \leq a_{n+1}$ la sucesión no es decreciente.
- Si $a_n = a_{n+1}$ la sucesión es constante.
- Si $a_n \cdot a_{n+1} < 0$ la sucesión es de signos alternados.

Ejemplo 1

¿Cuáles de las siguientes sucesiones son acotadas y cuáles no?

- a) $\left\{ \frac{1}{n^2} \right\}$
- b) $\left\{ \sin \frac{n\pi}{2} \right\}$
- c) $\left\{ \frac{n^2 - 1}{n - 1} \right\}$
- d) $a_{n+1} = \begin{cases} 3 & \text{si } n = 0 \\ a_n & \text{si } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

Resolución:

$$\text{a) } \left\{ \frac{1}{n^2} \right\} = \left\{ 1; \frac{1}{4}; \frac{1}{9}; \frac{1}{16}; \dots \right\}$$

Vemos que $\frac{1}{n^2} \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \left\{ \frac{1}{n^2} \right\}$ es acotada

b) $\left\{ \sin \frac{n\pi}{2} \right\}$

Sabemos que $-1 \leq \sin \frac{n\pi}{2} \leq 1$

$\Rightarrow \left\{ \sin \frac{n\pi}{2} \right\}$ es acotada

c) $\left\{ \frac{n^2-1}{n-1} \right\}$

Como $\frac{n^2-1}{n-1} = (n+1) \quad \forall n \geq 1$

$\Rightarrow \left\{ \frac{n^2-1}{n-1} \right\}$ no es acotada.

d) $a_{n+1} = \begin{cases} 3 & \text{si } n = 0 \\ a_n & \text{si } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

Vemos $\{a_n\} = \{3, 3, 3, \dots\}$ es una sucesión acotada

Ejemplo 2

Clasificar las sucesiones:

a) $a_{n+1} = 3a_n, a_1 = 5$

b) $\{a_n\}/a_n = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$

c) $a_{n+1} = 3 - a_n, a_1 = 1$

d) $\left\{ \left(\frac{1}{2} \right)^n \right\}$

e) $a_n = (-3)^n$

Resolución:

a) Como $a_{n+1} - a_n = 2a_n > 0$
 $\Rightarrow \{a_n\}$ es creciente

b) $\{a_n\} = \{\lfloor 1 \rfloor, \lfloor \sqrt{2} \rfloor, \lfloor \sqrt{3} \rfloor, \lfloor \sqrt{4} \rfloor, \dots\}$
 $= \{1; 1; 1; 2; \dots\}$
 Es una sucesión no decreciente

c) $a_{n+1} = 3 - a_n, a_1 = 1$
 $\{a_n\} = \{1; 2; 1; 2; \dots\}$
 La sucesión no es monótona.

d) $a_{n+1} - a_n = \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1}{2} \right)^n = \left(\frac{1}{2} \right)^n \left(\frac{1}{2} - 1 \right) < 0$
 \Rightarrow la sucesión es decreciente

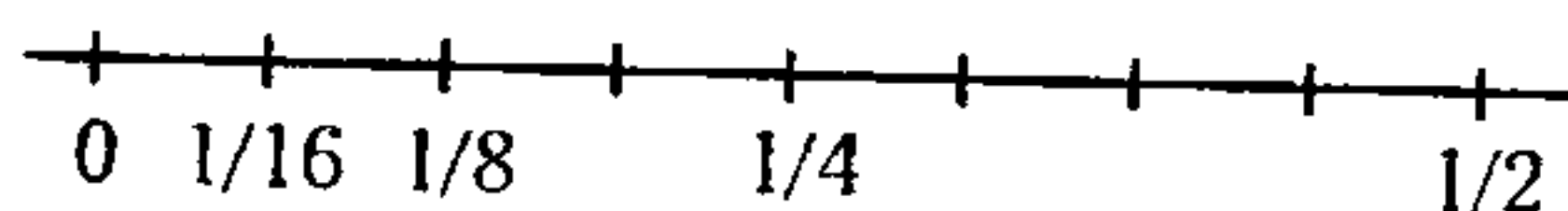
e) $\{a_n\} = \{-3; 9; -27; \dots\}$
 Es una sucesión de términos con signos alternados.

LÍMITE DE UNA SUCESIÓN

1. PUNTOS DE ACUMULACIÓN

Un punto de acumulación de una sucesión es un número real "r", alrededor del cual se "condensa" la sucesión.

Por ejemplo, en la sucesión definida por $\left\{ \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \frac{1}{16}; \dots; 0; \dots \right\}$, el cero es un punto de acumulación.



Definición

"b" es un punto de acumulación de la sucesión $\{a_n\}$ si y sólo si toda vecindad de "b" contiene un número infinito de términos de la sucesión, es decir, si dado $\varepsilon > 0$ $|b - a_n| < \varepsilon$ para un número infinito de valores de n.

Ejemplo

Dada la sucesión $\{a_n\}$ tal que:

$$a_n = 1 + \frac{1}{n}$$

1 es punto de acumulación puesto que dado $\varepsilon > 0$ se tiene que $|1 - a_n| < \varepsilon$ para todo n tal que

$$n = \frac{1}{\varepsilon} \text{ ya que } \left| 1 - \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right| = \frac{1}{n} \text{ y si } n = \alpha \left(\frac{1}{\varepsilon} \right),$$

$$\alpha > 1 \Rightarrow \left| \frac{1}{n} \right| < \left| \frac{\varepsilon}{\alpha} \right| < \varepsilon.$$

2. LÍMITE DE UNA SUCESIÓN

El límite de una sucesión $\{a_n\}$ es un número real L tal que los términos de la sucesión se aproximan cada vez más a él, al crecer "n".

Por ejemplo, 1 es el límite de la sucesión $\{0,9; 0,99; 0,999; \dots\}$

Si los términos de una sucesión $\{a_n\}$ se aproximan cada vez más al límite L , al crecer n , se tendrá que $|1-a_n|$ se hace cada vez más pequeño, es decir, que basta tomar n suficientemente grande para hacer $|1-a_n|$ tan pequeños como se quiera.

Definición

Se dice que L es el límite de la sucesión $\{a_n\}$ si y sólo si dado $\varepsilon > 0$ existe $N > 0$, tal que $|L-a_n| < \varepsilon$ para todo $n > N$.

Se escribe:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$$

Ejemplo 1

Demuestre que 3 es el límite de la sucesión:

$$\left\{3 + \frac{1}{n}\right\}$$

Resolución:

Dado $\varepsilon > 0$, demostraremos que existe $N > 0$ tal que $|L-a_n| < \varepsilon$; $\forall n > N$

$$\left|3 - \left(3 + \frac{1}{n}\right)\right| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n}$$

Tomando $N = \frac{1}{\varepsilon}$ se tiene que $n > N$

$$n = \alpha \frac{1}{\varepsilon}, \alpha > 1, \left|\frac{1}{n}\right| = \left|\frac{\varepsilon}{\alpha}\right| < \varepsilon$$

Ejemplo 2

Demstrar que $\frac{3}{4}$ es el límite de $a_n = \frac{3n-1}{4n+5}$

Resolución:

Hay que demostrar que para cualquier $\varepsilon > 0$ (por pequeño que sea) se debe demostrar la existencia de $N > 0$ (dependiente de ε) tal que:

$$\left|\frac{3}{4} - a_n\right| < \varepsilon \text{ para todo } n > N$$

$$\left|\frac{3}{4} - \frac{3n-1}{4n+5}\right| = \left|\frac{19}{4(4n+5)}\right| < \varepsilon$$

$$\frac{4(4n+5)}{19} > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n > \frac{1}{4} \left(\frac{19}{4\varepsilon} - 5 \right)$$

Eligiendo $N = \frac{1}{4} \left(\frac{19}{4\varepsilon} - 5 \right)$ se ve que $\left| \frac{3}{4} - a_n \right| < \varepsilon$ para todo $n > N$.



$$\text{Si } \varepsilon = 0,001; N = \frac{1}{4} \left(\frac{19}{4\varepsilon} - 5 \right)$$

$$N = \frac{1}{4} \left(\frac{19000}{4} - 5 \right) = 1186,25 \text{ lo que significa}$$

que todos los términos de la sucesión posteriores a de orden 1186 difieren en valor absoluto de $3/4$ en menos de 0,001.

Ejemplo 3

Demstrar que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2 \cdot 10^n}{5+3 \cdot 10^n} = \frac{2}{3}$

Resolución:

Hay que mostrar que para todo $\varepsilon > 0$ existe un N tal que:

$$\left| \frac{2}{3} - \frac{1+2 \cdot 10^n}{5+3 \cdot 10^n} \right| < \varepsilon, \text{ para todo } n > N$$

$$\left| \frac{2}{3} - \frac{1+2 \cdot 10^n}{5+3 \cdot 10^n} \right| = \frac{7}{3(5+3 \cdot 10^n)} < \varepsilon$$

$$\frac{3}{7}(5+3 \cdot 10^n) > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow 3 \cdot 10^n > \frac{7}{3\varepsilon} - 5$$

$$\Rightarrow n > \log \left\{ \frac{1}{3} \left[\frac{7}{3\varepsilon} - 5 \right] \right\} = N$$

$$\therefore \forall n > N, N = \log \left[\frac{1}{3} \left(\frac{7}{3\varepsilon} - 5 \right) \right]$$

$$\text{se tiene } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2 \cdot 10^n}{5+3 \cdot 10^n} = \frac{2}{3}$$

La sucesión $\{a_n\}$ se llama convergente cuando la sucesión tiene límite, en caso que no tenga límite la sucesión se llamará divergente.

CRITERIOS DE CONVERGENCIA

- I. Si una sucesión es monótona y acotada es convergente.

Ejemplo:

$\left\{ \frac{2n-1}{3n+2} \right\} : \left\{ \frac{1}{5}, \frac{3}{8}, \frac{5}{11}, \frac{7}{14}, \frac{9}{17}, \dots \right\}$ es monótona

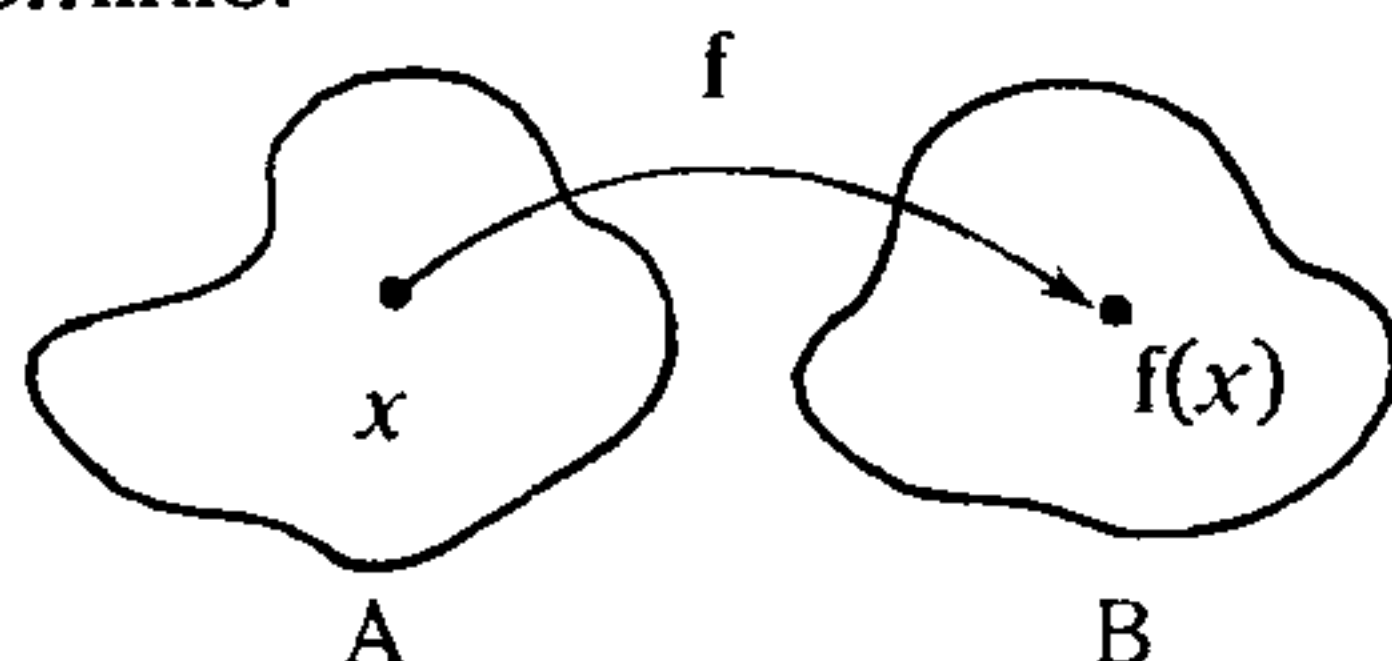
creciente y no supera cada término a $\frac{2}{3}$

\therefore es convergente

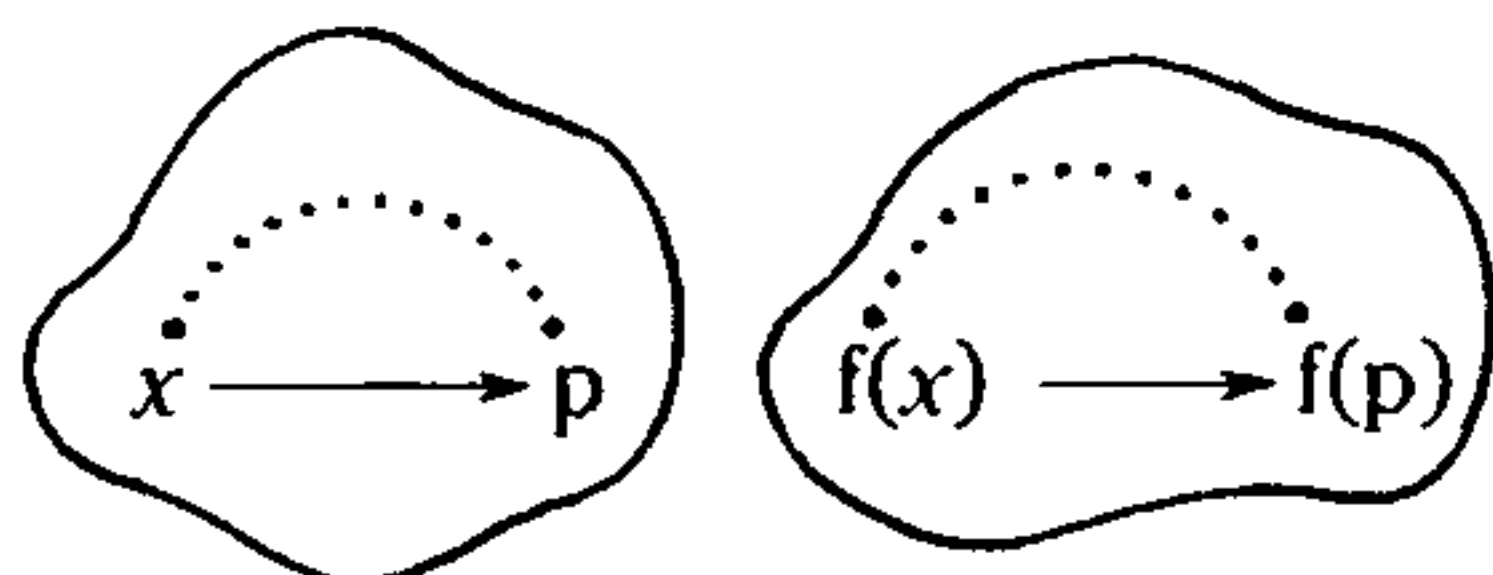
- II. Si una sucesión $\{a_n\}$ es tal que $b_n \leq a_n \leq c_n$, además, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = b \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b$

- III. Una sucesión $\{a_n\}$ es convergente si y sólo si dado $\varepsilon > 0$, existe $N > 0$ tal que para todo p , $m > N$ se tiene que $|a_p - a_m| < \varepsilon$ (criterio de Cauchy)

Ahora consideremos una función con dominio A y rango B y un punto x que se mueve en el dominio.



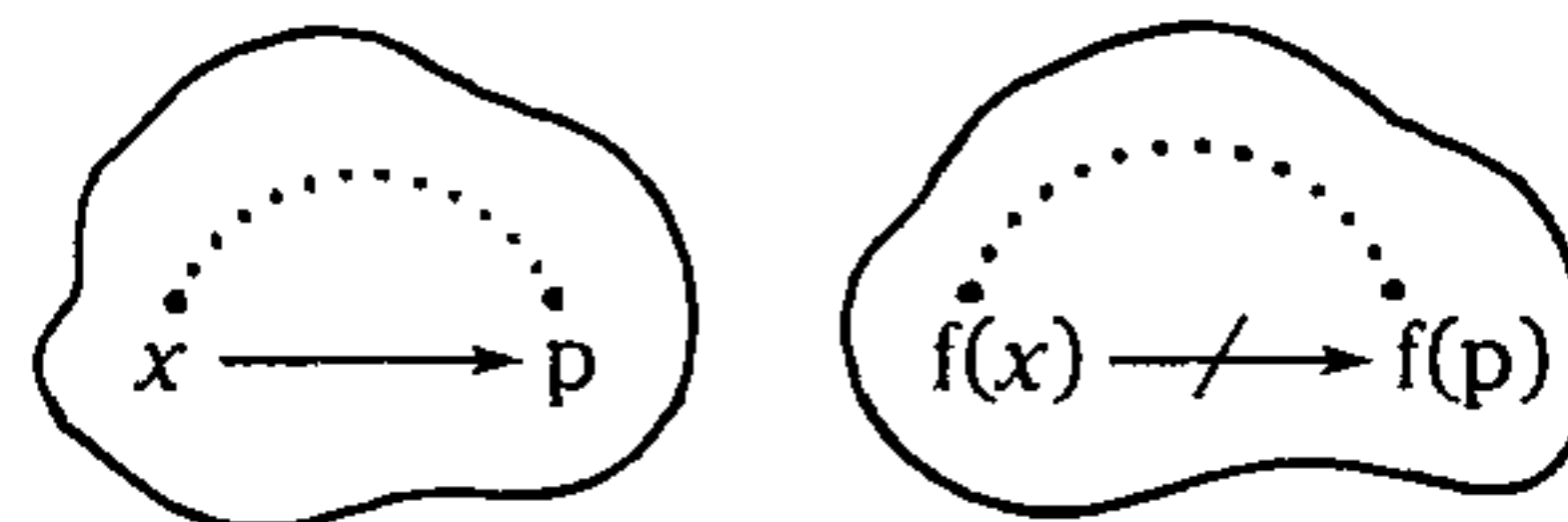
Se puede considerar que f representa un proceso dinámico, en donde el movimiento de x en el dominio provoca un movimiento del punto $f(x)$ en el conjunto B. Al acercarse x a un punto fijo p , $f(x)$ puede acercarse a un punto fijo $f(p)$ de B.



$x \rightarrow p$ implica $f(x) \rightarrow f(p)$

Si esto sucede, se dice que la función f tiene límite cuando x tiende a p , sin embargo, puede también suceder que el punto $f(x)$ no se acerque

a algún valor y en ese caso se dice que la función f no tiene límite cuando x tiende a p .

**Ejemplos**

1. Sea $f(x) = x^2 + 1$ cuando $x \rightarrow 2$. Veamos la variación de f para una variación de x .

x	1	1,1	1,2	1,9	2
$f(x)$	2	2,21	2,44	4,61	5

Vemos que cuando $x \rightarrow 2$, $f(x) \rightarrow 5$

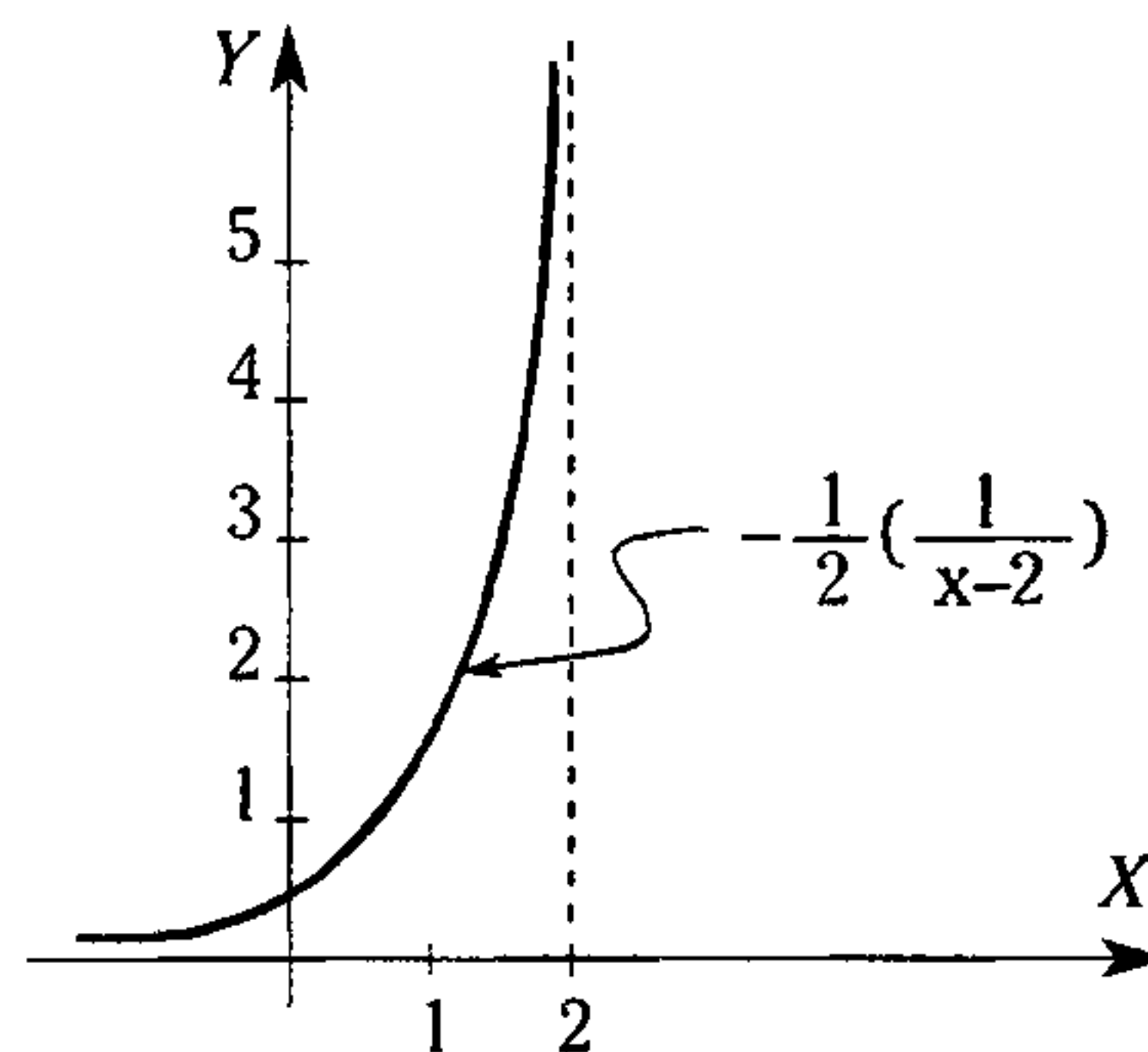
2. Sea $g(x) = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-2} \right)$ cuando $x \rightarrow 2$.

Veamos la variación de g para una variación de x .

x	1	1,1	1,2	2
g	$\frac{1}{2}$	$\frac{10}{18}$	$\frac{10}{16}$	$\frac{10}{0}$

En este caso, la función no se acerca a ningún valor.

Gráficamente.



En el primer ejemplo, se dice que la función tiene límite cuando x tiende a 2. La función tiende a 5, es decir, su límite es 5. En el segundo ejemplo, la función no tiene límite puesto que el valor de la función crece indefinidamente al acercarse la variable al valor de 2.

LÍMITE

DEFINICIÓN FORMAL DE LÍMITE

Para formalizar el concepto x tiende a p , se toma una sucesión $\{x_n\}$ convergente a p en el dominio de la función f . A esta sucesión $\{x_n\}$ corresponde otra sucesión $\{f(x_n)\}$ de valores de la función, si esta sucesión es convergente y converge a L , se dice que $\{f(x_n)\}$ tiene límite L cuando x tiende a p .

Y se denota:

$$L = \lim_{x \rightarrow p} f(x)$$

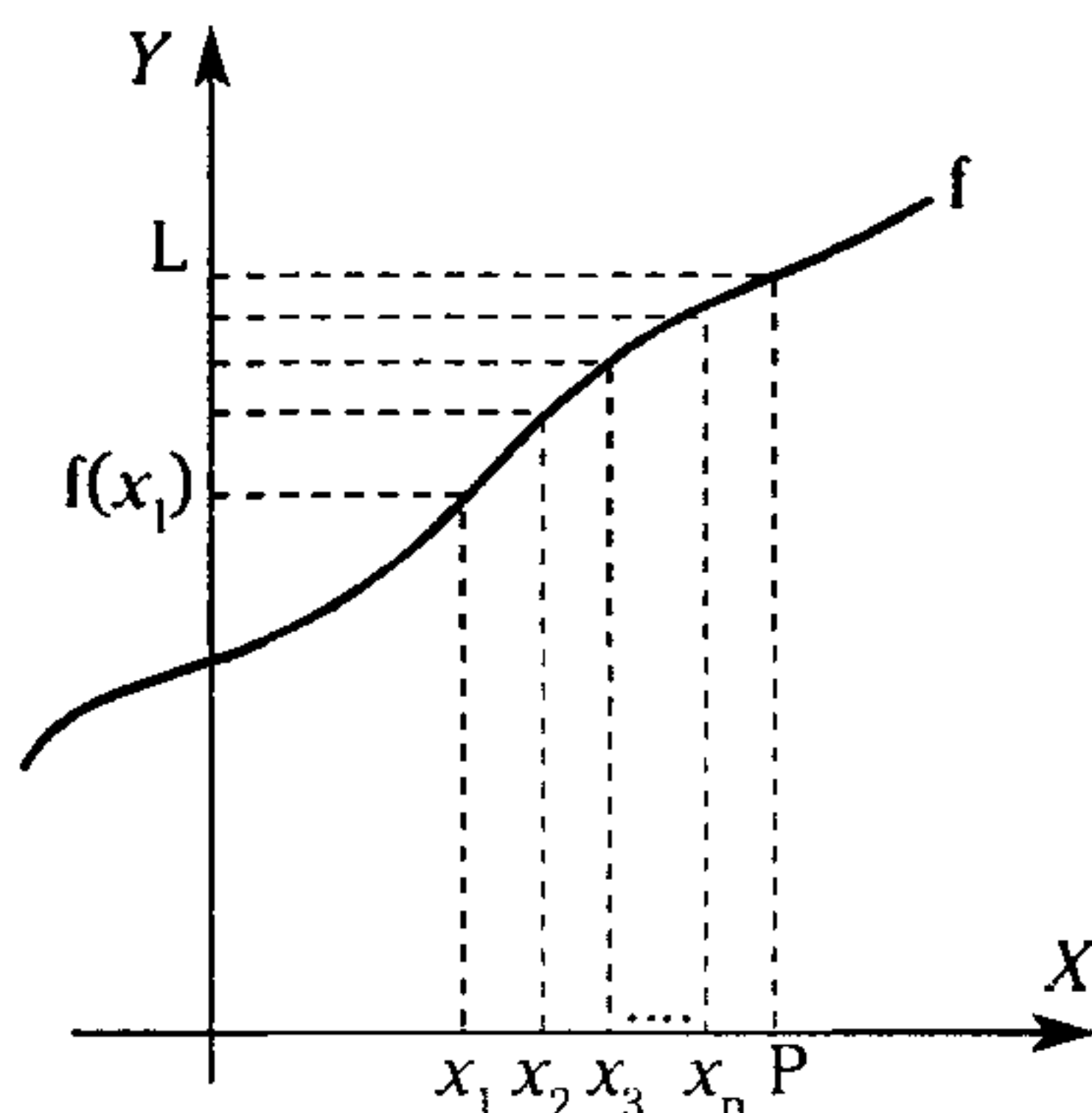
Definición

Se dice que la función $f(x)$ tiene límite cuando x tiende a p y que ese límite es L , escribiéndose

$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L$ si y sólo si, para toda sucesión de

valores de la variable $\{x_n\}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = p$ se

tiene que: $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = L$



Como conclusión de la definición de función y de límite, se tiene que el valor del límite L de la función es independiente de la sucesión $\{x_n\}$ convergente a p que se elija.

Esto quiere decir que si se toma dos sucesiones diferentes $\{x_n\}$, $\{x_m\}$ que converjan a p , entonces las sucesiones $\{f(x_n)\}$ y $\{f(x_m)\}$ convergerán a L .

Esta definición no proporciona un criterio práctico para determinar el límite de una función; para este propósito es conveniente emplear el siguiente teorema.

TEOREMA

L es el límite de $f(x)$ cuando x tiende a p si y sólo si dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ para todo x tal que $|x - p| < \delta$.

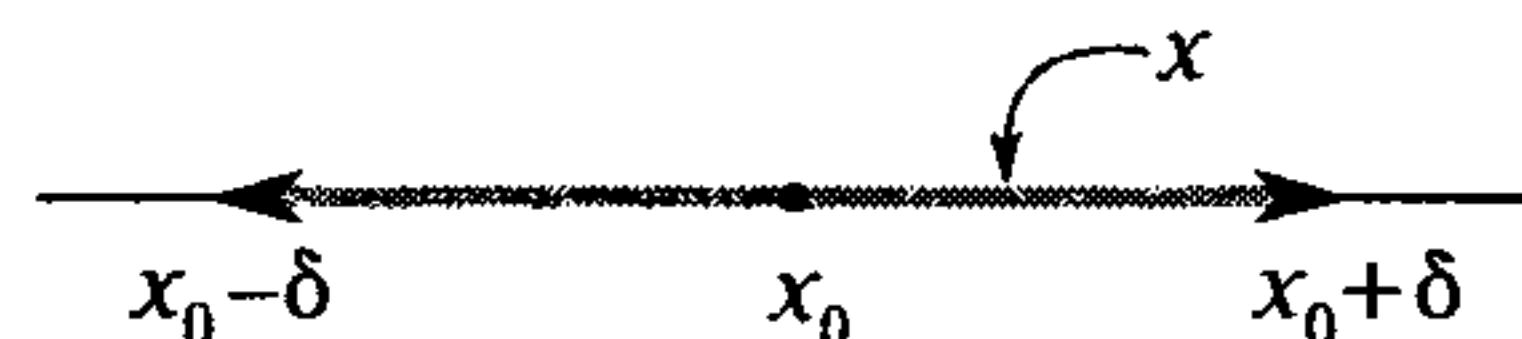
Esto implica que todos los puntos contenidos en una vecindad cualquiera de L , se obtiene mediante la función a partir de puntos que están en una vecindad de p .

Vecindad

Se llama vecindad de centro x_0 y de radio $\delta > 0$ al intervalo abierto de centro x_0 y de extremos $x_0 - \delta$ y $x_0 + \delta$ y se denota por:

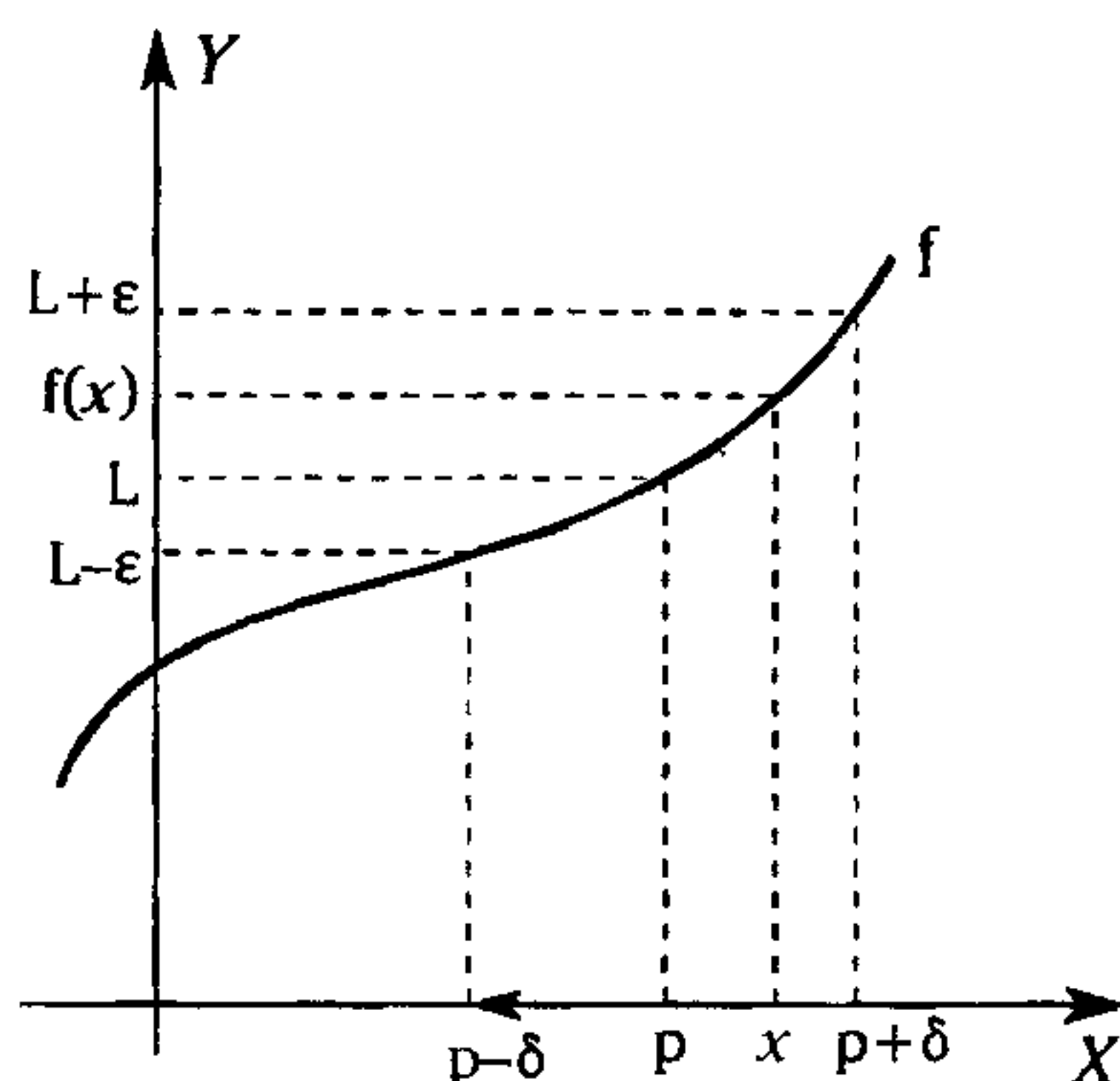
$$V_\delta(x_0) = \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle$$

Gráficamente:



$$x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \Leftrightarrow \delta < x - x_0 < \delta \Leftrightarrow |x - x_0| < \delta$$

$$\Rightarrow x \in V_\delta(x_0) \Leftrightarrow |x - x_0| < \delta$$

Interpretación geométrica del teorema con $x_0 = p$ 

$$p - \delta < x < p + \delta \Leftrightarrow -\delta < x - p < \delta \Leftrightarrow |x - p| < \delta$$

$$L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < f(x) - L < \varepsilon \Leftrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Demostración del teorema

Sea $f(x)$ una función que satisface la condición impuesta por el teorema. Tomemos una sucesión $\{x_n\}$ tal que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = p$$

Esta sucesión origina la sucesión $\{f(x_n)\}$ y se debe demostrar que dado un $\varepsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que $|f(x_n) - L| < \varepsilon$ para $n > N$, es decir, que requiere encontrar el valor de N para cada ε .

Para ello, basta aplicar la condición impuesta en el teorema que permite asociar a cada ε con $\delta > 0$, tal que:

$$|x - p| < \delta \text{ si } |f(x) - L| < \varepsilon$$

Una vez obtenido el valor de δ que corresponde a ε basta recordar que $|x_n - p| < \delta$ para todo $n > N_\delta$ puesto que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = p$

Este valor de N_δ es tal que $|f(x_n) - L| < \varepsilon$ para todo $n > N_\delta$ y entonces se tiene que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L$$

Por lo tanto la condición es suficiente.

Para demostrar que la condición es necesaria emplearemos el método de reducción al absurdo. Suponiendo que:

$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L$, pero que no cumple la condición impuesta al teorema, es decir, que dado $\varepsilon > 0$, no existe $\delta > 0$ tal que:

$$|f(x) - L| < \varepsilon \text{ si } |x - p| < \delta$$

Esto significa que para cualquier $\delta > 0$ existe un valor β de x para que $|\beta - p| < \delta$ tal que $|f(\beta) - L| \geq \varepsilon$

Tomemos ahora una sucesión de valores de x definida en la forma siguiente:

- I. Se construye una sucesión de vecindades del punto $x = p$ cuyos radios sean los términos de una sucesión $\{\delta_n\}$, $\delta_n > 0$ tal que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{\delta_n\} = 0$$

- II. Se toma un punto β de cada una de estas vecindades que cumplan la condición:

$$|f(\beta_n) - L| \geq \varepsilon$$

Por hipótesis en cada vecindad existe cuando menos un punto β .

La sucesión $\{|\beta_n - L|\}$ tiene un límite cero, puesto que cada uno de sus términos es positivo, al mismo tiempo, es menor que el término correspondiente de una sucesión cuyo límite es cero.

$$\text{Entonces } \lim_{n \rightarrow \infty} \{\delta_n\} = p$$

Hemos construido una sucesión de valores de la variable que tiende a p , sin embargo, la sucesión correspondiente de valores de la función $\{f(\beta_n)\}$ no tiene límite porque para todo n $|f(\beta_n) - L| \geq \varepsilon$

Hemos llegado a una contradicción, entonces se ha demostrado que la condición impuesta en el teorema es necesario.

Ejemplo 1

Demostrar que $\lim_{x \rightarrow 3} (x+2) = 5$

Resolución:

Sea $f(x) = x+2$, $p=3$, $L=5$ se tiene que

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

$$|x+2-5| = |x-3| < \varepsilon$$

basta elegir $\delta = \varepsilon$ para que $|f(x)-5| < \varepsilon$ tal que

$$|x-3| < \delta$$

Con lo cual queda probado que $\lim_{x \rightarrow 3} (x+2) = 5$

Elección de δ

De:

$$|x-4|^2 + 8|x-4| < \varepsilon \text{ con } |x-4| < \delta$$

$$\text{se tiene: } \delta^2 + 8\delta < \varepsilon$$

$$\delta^2 + 8\delta + 16 < \varepsilon + 16 \Rightarrow (\delta + 4)^2 < \varepsilon + 16$$

$$\Rightarrow \delta + 4 < \sqrt{\varepsilon + 16} \Rightarrow \delta < \sqrt{\varepsilon + 16} - 4$$

$$\text{Luego se elige } \delta = \sqrt{\varepsilon + 16} - 4$$

Ejemplo 2

Demostrar que $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{5x}{3} = 5$

Resolución:

$$\text{Sea } f(x) = \frac{5x}{3} \Rightarrow L = 5 \wedge p = 3$$

$$\Rightarrow |f(x) - L| = \left| \frac{5x}{3} - 5 \right| = \frac{5}{3} |x - 3| < \varepsilon$$

dado $\varepsilon > 0$ basta elegir $\delta = \frac{3}{5}\varepsilon$

con lo cual $|x-3| < \delta$

\therefore queda demostrado

Ejemplo 3

Demostrar que $\lim_{x \rightarrow 4} (x^2 - 3) = 13$

Resolución:

$$\text{Sea } f(x) = x^2 - 3 \Rightarrow L = 13, p = 4$$

$$|f(x) - L| = |x^2 - 3 - 13| = |(x-4)(x+4)| < \varepsilon$$

$$= |(x-4)(x-4) + 8| \leq |x-4|^2 + 8|x-4| < \varepsilon$$

Para $\varepsilon > 0$ basta escoger $\delta = \sqrt{16 + \varepsilon} - 4$

Para que $|f(x) - 13| < \varepsilon$ para todo x tal que

$$|x-4| < \delta$$

Ejemplo 4

Demostrar que:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^4 - 6x^3 + x^2 + 3}{x-1} = -8$$

Resolución:

Dado $\varepsilon > 0$ hay que demostrar la existencia de

$\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ con $|x-1| < \delta$

$$\Rightarrow |f(x) - L| = \left| \frac{2x^4 - 6x^3 + x^2 + 3}{x-1} - (-8) \right|$$

Como $0 < |x-1| < \delta$, $x \neq 1$ y factorizando se tiene:

$$= \left| \frac{(x-1)(2x^3 - 4x^2 - 3x - 3)}{(x-1)} + 8 \right|$$

$$= |12x^3 - 4x^2 - 3x + 5| = |x-1| |2x^2 - 2x - 5|$$

Si $|x-1| < \delta$ tomando $\delta \leq 1$ se tiene $-1 < x-1 \leq 1$

$$\Rightarrow 0 < x < 2$$

$$< \delta(8 + 4 + 5) = 17\delta$$

Tomando para δ al menor valor de los 1 y $\frac{\varepsilon}{17}$ se

tiene lo pedido:

$$\therefore \delta = \min \left\{ 1; \frac{\varepsilon}{17} \right\} \text{ con lo cual}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^4 - 6x^3 + x^2 + 3}{x-1} = -8$$

EXTENSIÓN DE LA DEFINICIÓN DE LÍMITE

Para dar una extensión de la definición de límite de una función, cuando no todas las sucesiones de valores de la variable conducen a sucesiones de valores de la función, con el mismo límite.

El concepto de límite de una función se puede extender favorablemente en los dos siguientes casos:

1. LÍMITE POR LA DERECHA

Cuando para toda sucesión de valores de la variable $\{x_n\}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$ con $x_n \geq b$, se tiene que $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = c$, se dice entonces que c es el límite por la derecha de la función $f(x)$ cuando x tiende a b .

Observe que en este caso todas las sucesiones de valores de la variable se acercan a b por la derecha, lo cual justifica la nomenclatura. En este caso se escribe:

$$\lim_{x \rightarrow b^+} f(x) = c$$

2. LÍMITE POR LA IZQUIERDA

Cuando para toda sucesión de valores de la variable $\{x_n\}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$ con $x_n \leq b$, se tiene que $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = c$, entonces se dice que c es el límite por la izquierda de la función $f(x)$ cuando x tiende a b . En este caso, todas las sucesiones de valores de la variable se acercan a b por la izquierda y se escribe:

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = d$$

Los límites se llaman límites laterales.

TEOREMA

Existe el límite de una función si sus límites laterales son iguales y éste a la vez es el límite de la función.

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow b^+} f(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow b} f(x) = b$$

Calcular los límites laterales de $f(x) = \llbracket x \rrbracket$ cuando x tiende a 2.

Resolución:

Límite por la derecha

Si $2 \leq x < 3$ entonces $f(x) = 2$ por definición del máximo entero. Por consiguiente, cualquier sucesión $\{x_n\}$ de valores de x , tal que $2 \leq x_n < 3$ producirá una sucesión de valores de la función $\{f(x_n)\}$ donde $f(x_n) = 2$ y por lo tanto:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2$$

Límite por la izquierda

Si $1 \leq x < 2$ entonces $f(x) = 1$.

Por consiguiente, cualquier sucesión $\{x_n\}$ de valores de x , tal que $1 < x_n \leq 2$ producirá una sucesión $\{f(x_n)\}$, constante de valores de la función $f(x_n) = 1$. Entonces:

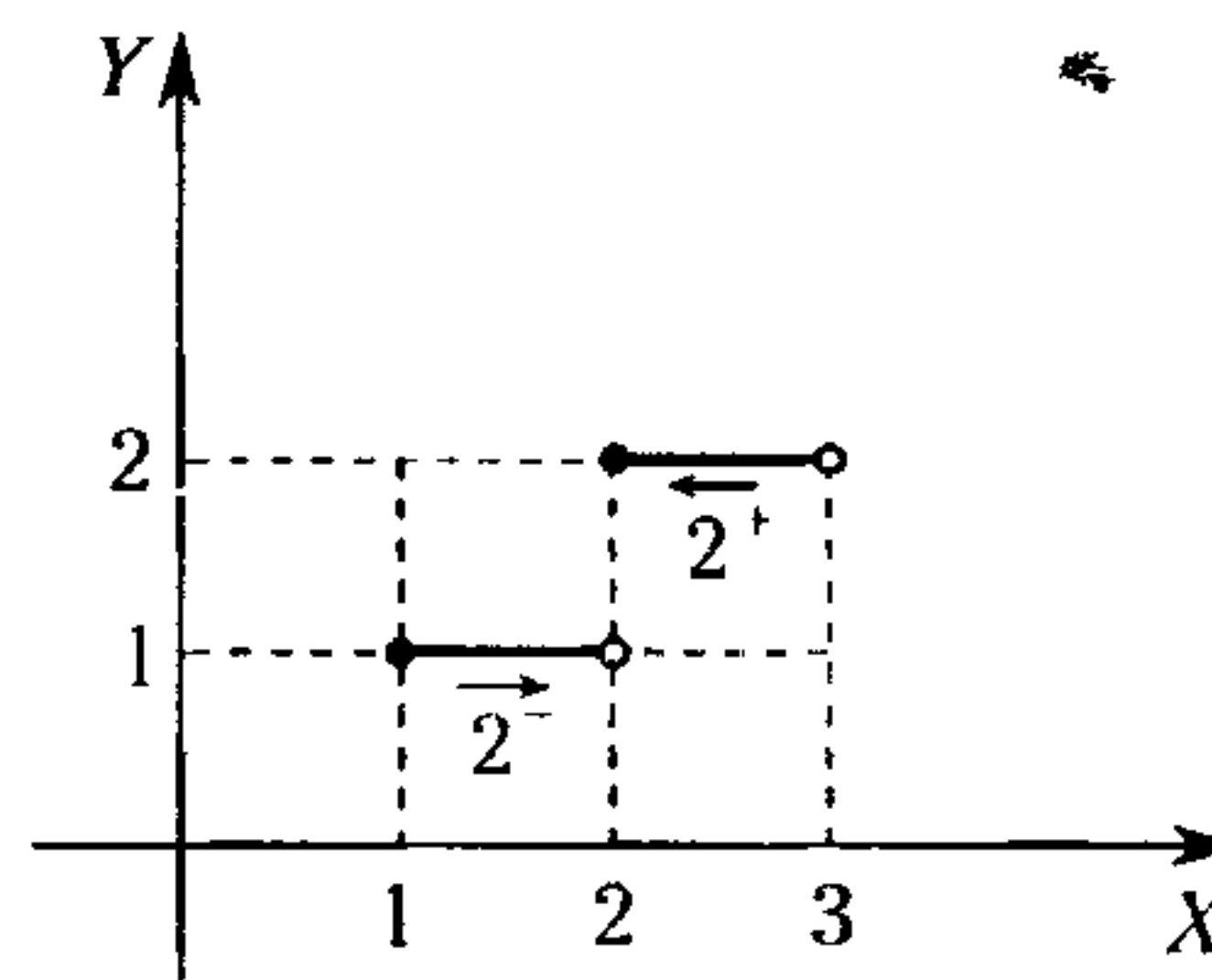
$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1$$

Por lo tanto:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1$$

De I y II muy a pesar que tienen límites laterales, por ser distintos hace concluir que el límite de la función cuando x tiende a 2 no existe.

Gráficamente



TEOREMA (Sandwich)

Si $h(x) \leq g(x) \leq f(x)$ y

$$\lim_{x \rightarrow a} h(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$$

Para demostrar basta recordar que por hipótesis, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0$ tales que $|h(x) - b| < \varepsilon_1$ para todo x , tal que $|x - a| < \delta_1$ y $|f(x) - b| < \varepsilon_2$ para todo x , tal que $|x - a| < \delta_2$, es decir, tomando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ existe δ , tal que

$$|h(x) - b| < \varepsilon \text{ para todo } x \text{ tal que } |x - a| < \delta$$

Debido a que $|f(x) - b| < \varepsilon$, se dice que:

$$-\varepsilon < f(x) - b < \varepsilon \Rightarrow b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon.$$

Así mismo de $|h(x) - b| < \varepsilon$ se tiene:

$$-\varepsilon < h(x) - b < \varepsilon \Rightarrow b - \varepsilon < h(x) < b + \varepsilon$$

Puesto que $g(x) \leq f(x)$ se tiene $g(x) < b + \varepsilon$ y como $g(x) \geq h(x)$ se tiene que $g(x) > b - \varepsilon$

$$\text{De donde: } b - \varepsilon < g(x) < b + \varepsilon$$

lo cual implica que $|g(x) - b| < \varepsilon$

Es decir, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|g(x) - b| < \varepsilon$ para todo x tal que $|x - a| < \delta$

Por lo tanto, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$

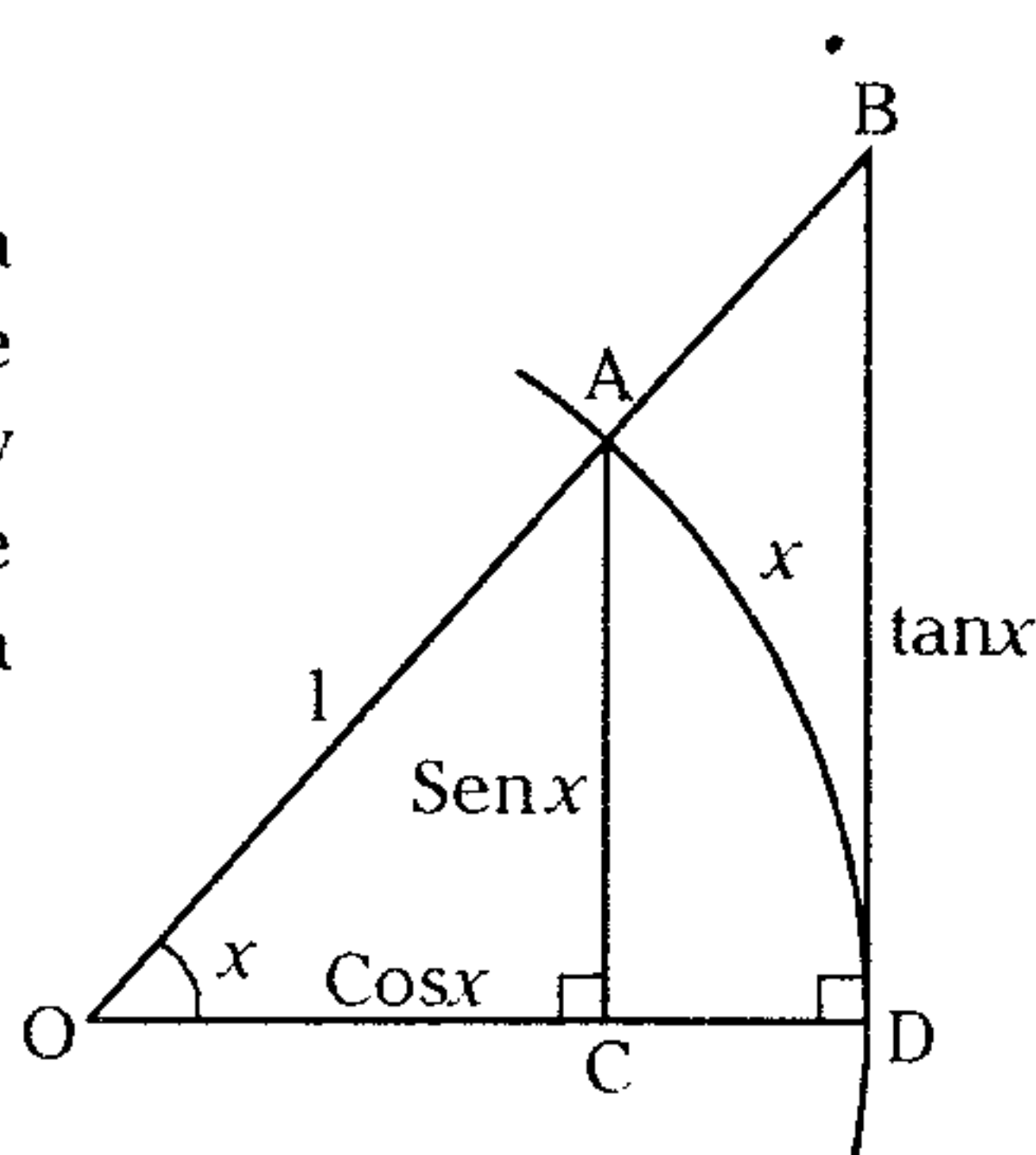
Ejemplo 1

Demostrar geoméricamente que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Resolución:

Construimos una circunferencia de centro $(0;0)$ y radio 1 como se observa en la figura.



Por áreas:

$$\text{Área del triángulo OAC} < \text{Área del sector OAD} < \text{Área del triángulo OBD}$$

$$\frac{1}{2} \cos x \sin x < \frac{1}{2} x \cdot 1 < \frac{1}{2} 1 \cdot \tan x$$

Dividiendo por $\frac{1}{2} \sin x$ se tiene:

$$\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \Rightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x} < \frac{1}{\cos x}$$

Luego, tomando límite cuando $x \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1 \text{ y } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Ejemplo 2

$$\text{Demostrar que } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{1 + e^{-1/x}} = 2$$

Resolución:

Al tender $x \rightarrow 0^+$ parece que $\frac{1}{x}$ crece indefinidamente, $e^{1/x}$ crece indefinidamente, $e^{-1/x}$ tiende a cero, $1 + e^{-1/x}$ tiende a 1 de modo que el límite pedido es 2.

Para demostrar hay que hallar $\delta > 0$ para un $\varepsilon > 0$ dado tal que:

$$\left| \frac{2}{1 + e^{-1/x}} - 2 \right| < \varepsilon \text{ si } 0 < x < \delta$$

$$\text{Como } \left| \frac{2}{1 + e^{-1/x}} - 2 \right| = \left| \frac{2e^{-1/x}}{1 + e^{-1/x}} \right| = \frac{2}{e^{1/x} + 1} < \varepsilon$$

$$\text{Si } \frac{e^{1/x} + 1}{2} > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow e^{1/x} > \frac{2}{\varepsilon} - 1$$

$$\text{Tomando logaritmo } \frac{1}{x} > \ln\left(\frac{2}{\varepsilon} - 1\right)$$

Así $0 < x < \frac{1}{\ln\left(\frac{2}{\varepsilon} - 1\right)}$ se puede ver que queda demostrado.

Ejemplo 3

Halle el límite de $f(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ cuando x tiende a cero.

Resolución:

Tomando límites laterales.

$$I. \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$II. \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

Como estos límites son distintos el límite pedido no existe.

TEOREMAS SOBRE LÍMITES

Sean f y g dos funciones tales que:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \wedge \lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$$

con $a, b, c \in \mathbb{R}$ se cumple que:

$$1. \quad \lim_{x \rightarrow a} \lambda f(x) = \lambda \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lambda b \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b \pm c$$

$$3. \quad \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b \cdot c$$

$$4. \quad \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{b}{c} \quad \text{si } c \neq 0$$

$$5. \quad \lim_{x \rightarrow a} (f(x))^n = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right)^n = b^n, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$6. \quad \lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} = \sqrt[n]{b}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Si n es par debe cumplirse que $b \geq 0$

$$7. \quad \lim_{x \rightarrow a} (\log_r f(x)) = \log_r \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right) = \log_r b; \quad b > 0$$

$$8. \quad \lim_{x \rightarrow a} p^{f(x)} = p^{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} = p^b, \quad p \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$$

$$9. \quad \lim_{x \rightarrow a} (f(x)^{g(x)}) = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right)^{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = b^c$$

con $b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$

Demostración

2. Por hipótesis se tiene que dado $\varepsilon > 0$, dado $\delta > 0$, tal que $|f(x) - b| < \varepsilon_1$ y $|g(x) - c| < \varepsilon_2$ para todo x si $|x - a| < \delta$

Como

$$|f(x) + g(x) - (b + c)| = |(f(x) - b) + (g(x) - c)| \leq |f(x) - b| + |g(x) - c| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon$$

$$\text{Tomando } \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2}$$

$\Rightarrow |f(x) + g(x) - (b + c)| < \varepsilon$ para todo x tal que $|x - a| < \delta$

3. $|f(x)g(x) - bc| = |f(x)g(x) - f(x)c + f(x)c - bc| = |f(x)(g(x) - c) + c(f(x) - b)| \leq |f(x)| |g(x) - c| + |c| |f(x) - b| = |f(x) - b + b| |g(x) - c| + |c| |f(x) - b| \leq (|f(x) - b| + |b|) |g(x) - c| + |c| |f(x) - b|$
Como $|f(x) - b| < \varepsilon_1$ y $|g(x) - c| < \varepsilon_1$, se tiene:

$$\leq (\varepsilon_1 + |b|) \varepsilon_1 + |c| \varepsilon_1 = \varepsilon_1^2 + |b| \varepsilon_1 + |c| \varepsilon_1$$

se tiene $|f(x)g(x) - bc| < \varepsilon$ para todo x , tal que $|x - a| < \delta$

$$4. \quad \left| \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{b}{c} \right| = \frac{|cf(x) - bg(x)|}{|g(x)c|} = \frac{|cf(x) - bc + bc - bg(x)|}{|g(x)||c|} = \frac{|c(f(x) - b) - b(g(x) - c)|}{|g(x)||c|}$$

Por hipótesis dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - b| < \varepsilon_1$, $|g(x) - c| < \varepsilon_1$, para todo x tal que $|x - a| < \delta$

Entonces podemos escribir:

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{b}{c} \right| < \frac{\varepsilon_1(|c| + |b|)}{-|c|\varepsilon_1 + c^2} = \frac{\varepsilon_1(1 + |b/c|)}{-\varepsilon_1 + |c|}$$

$$|c| = |c - g(x) + g(x)| \leq |c - g(x)| + |g(x)| \Rightarrow |g(x)| > |c| - \varepsilon_1$$

$$\text{Eligiendo: } \frac{\varepsilon_1(1 + |b/c|)}{-\varepsilon_1 + |c|} = \varepsilon > 0$$

existe $\delta > 0$ tal que $\left| \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{b}{c} \right| < \varepsilon$ para todo x con $|x - a| < \delta$

Aplicación 1

Halle los límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 6x + 4)$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 + 1)(x^3 - 1)$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x^2 - 3x + 1}{x^2 - 2x + 5}$

Resolución:

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 6x + 4) &= \lim_{x \rightarrow 3} x^2 - \lim_{x \rightarrow 3} 6x + \lim_{x \rightarrow 3} 4 \\ &= 3^2 - 6 \times 3 + 4 = -5 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} [(3x^2 + 1)(x^3 - 1)] &= \lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 + 1) \lim_{x \rightarrow 2} (x^3 - 1) \\ &= (3 \times 2^2 + 1)(2^3 - 1) = 13 \times 8 = 104 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x^2 - 3x + 1}{x^2 - 2x + 5} &= \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (6x^2 - 3x + 1)}{\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 2x + 5)} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow 1} 6x^2 - 3 \lim_{x \rightarrow 1} x + \lim_{x \rightarrow 1} 1}{\lim_{x \rightarrow 1} x^2 - \lim_{x \rightarrow 1} 2x + \lim_{x \rightarrow 1} 5} = \frac{6 - 3 + 1}{1 - 2 + 5} \\ &= \frac{4}{4} = 1 \end{aligned}$$

Aplicación 2Calcular $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x))$ **Resolución:**

Para calcular este límite hay que considerar primero $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$, si este límite existe y es, por ejemplo c, entonces $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = \lim_{g \rightarrow c} f(g)$. Si el límite de $g(x)$ cuando x tiende a "a" no existe, entonces no tiene sentido hablar del $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x))$, puesto que el argumento de la función f , no tiende a un valor determinado.

Así:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 3} f(g(x)) \text{ si } \begin{aligned} g(x) &= x + 6 \\ f(x) &= 2x \end{aligned}$$

I. $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3} (x + 6) = 3 + 6 = 9$

II. $\lim_{z \rightarrow 9} f(z) = \lim_{z \rightarrow 9} 2z = 2 \cdot 9 = 18$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 1} f(g(x)) \text{ cuando } \begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{x-1} \\ f(z) &= z^2 \end{aligned}$$

I. $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} \right) = \frac{1}{1-1} = \frac{1}{0}$

Aquí no se puede hablar de límite.

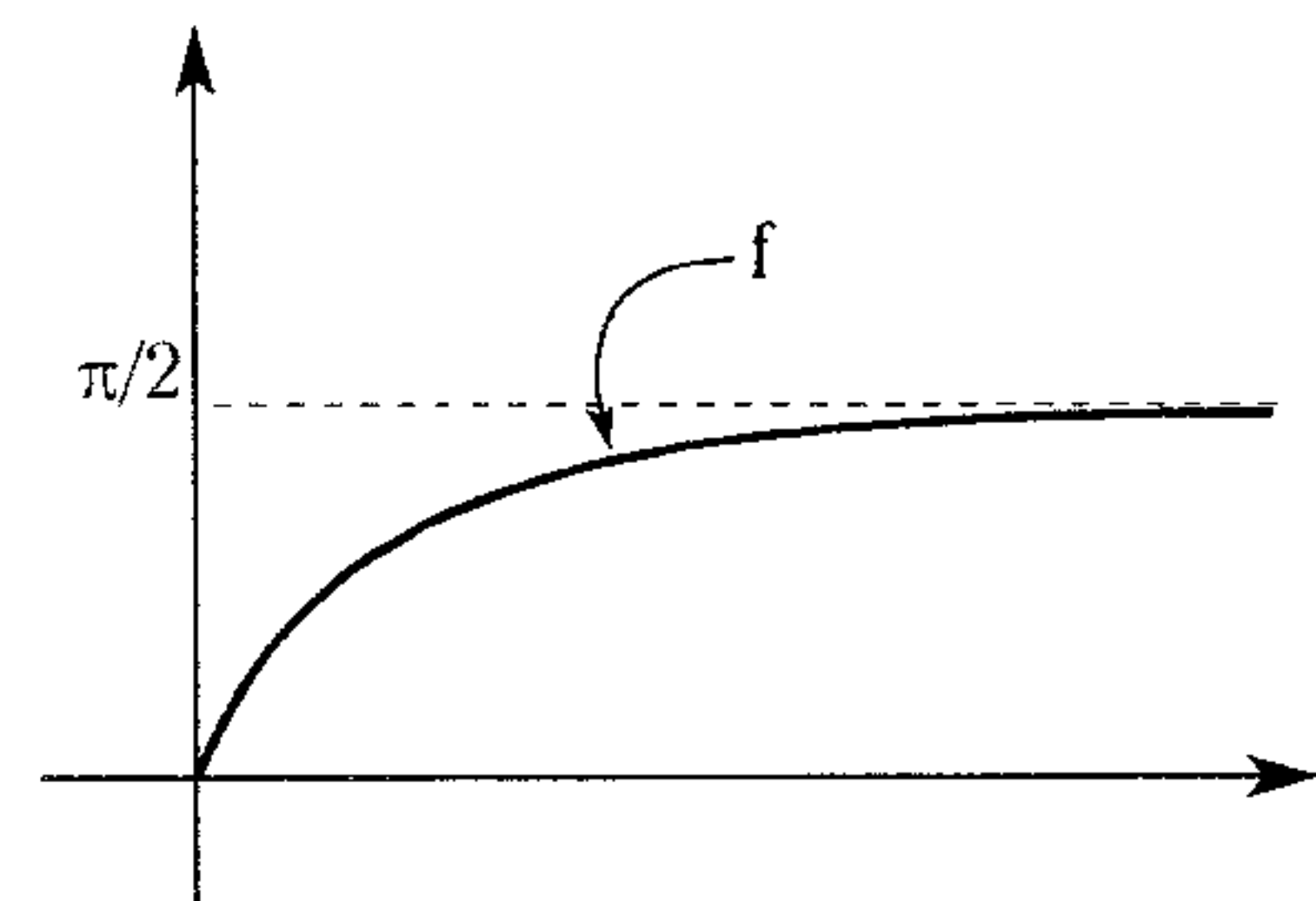
COMPORTAMIENTO ASINTÓTICO DEL LÍMITE

Hasta ahora solamente se ha hablado del límite de una función cuando la variable tiende a un valor finito; sin embargo, es posible definir también el límite de una función cuando la variable crece indefinidamente, es decir, cuando la variable tiende a infinito.

Basta considerar cualquier sucesión no acotada de x .

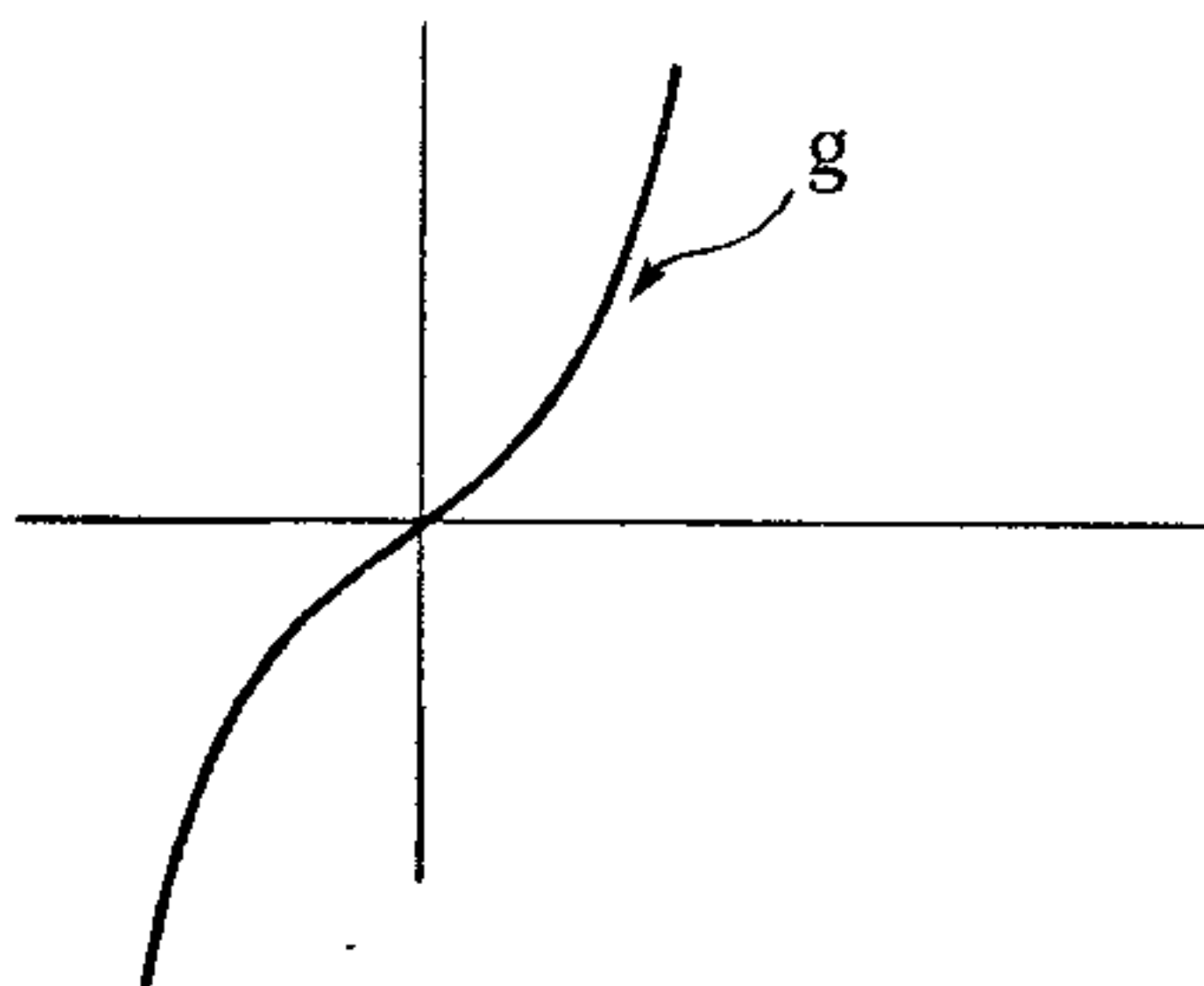
Ejemplos:

1. Sea la función $f(x) = \arctan x$, cuando x crece ilimitadamente.



Al crecer x , la función se acerca al valor de $\pi/2$ y denotamos por $\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$

2. Sea la función $g(x)=x^3$, cuando x crece ilimitadamente.



Al crecer x , la función también crece ilimitadamente y la denotamos por

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 = \infty$$

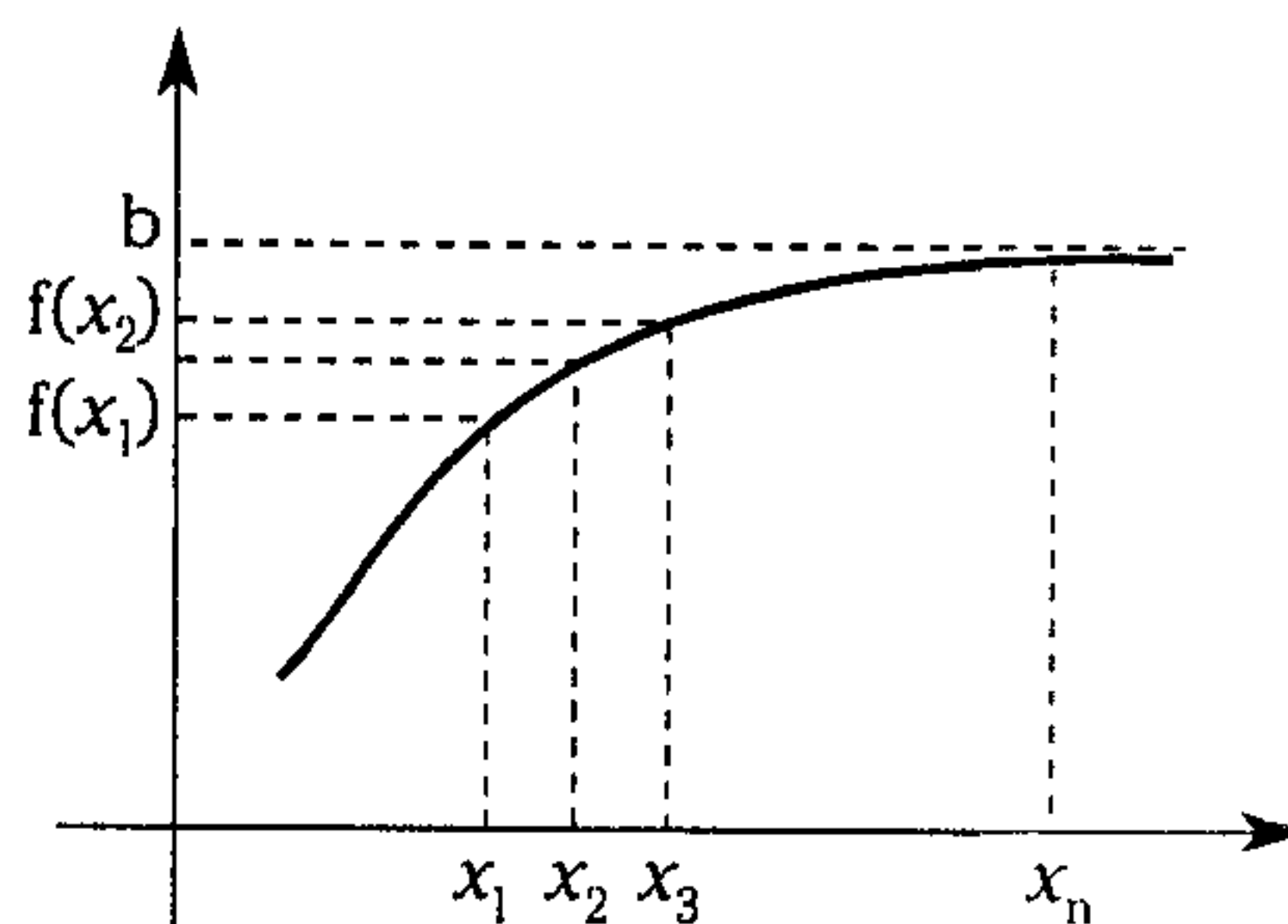
Se dice que b es el límite de $f(x)$ cuando x tiende al infinito (es decir, cuando x crece ilimitadamente) y se escribe:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$$

Si y sólo si, para toda sucesión divergente de valores de la variable $\{x_n\}$, la sucesión correspondiente de valores de la función $\{f(x_n)\}$ es tal que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b$$

Esto equivale a decir que siempre es posible encontrar un valor x_δ de x , tal que dado $\varepsilon > 0$ y $\delta > 0$ se tiene que $|f(x) - b| < \varepsilon$ para todo x tal que $x > x_\delta$



Cuando $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$ se dice que f tiende a b asintóticamente.

LÍMITE AL INFINITO

Un número real b se dice que es el límite de $f(x)$ cuando x tiende a $+\infty$ o cuando x crece ilimitadamente y se escribe:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists k \in \mathbb{R}$$

tal que $x > k \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$

Un número real b se dice que es el límite de $f(x)$ cuando x tiende a $-\infty$, o cuando x decrece ilimitadamente y se escribe:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists k \in \mathbb{R}$$

tal que $x < k \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$

Ejemplo 1

Demostrar que si $n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

Resolución:

Se debe demostrar que $\forall \varepsilon > 0, \exists k \in \mathbb{R}$ tal que

$$x > k \Rightarrow \left| \frac{1}{x^n} - 0 \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{1}{x^n} - 0 \right| = \frac{1}{x^n} < \varepsilon \Rightarrow x^n > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow x > \sqrt[n]{\frac{1}{\varepsilon}}$$

$$\text{Si } x > \sqrt[n]{\frac{1}{\varepsilon}} \Rightarrow \left| \frac{1}{x^n} - 0 \right| < \varepsilon$$

$$\text{se elige: } k = \sqrt[n]{\frac{1}{\varepsilon}}$$

Ejemplo 2

Demostrar que si $n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

Resolución:

Se debe demostrar que $\forall \varepsilon > 0, \exists k \in \mathbb{R}$ tal que

$$x < k \Rightarrow \left| \frac{1}{x^n} - 0 \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{1}{x^n} - 0 \right| = \left| \frac{1}{x^n} \right| = \frac{1}{|x|^n} < \varepsilon \Rightarrow |x|^n > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow |x| > \sqrt[n]{\frac{1}{\varepsilon}} \Leftrightarrow x > \sqrt[n]{\frac{1}{\varepsilon}} \vee x < -\sqrt[n]{\frac{1}{\varepsilon}}$$

$$\text{Si } x < -\sqrt[n]{\frac{1}{\varepsilon}} \Rightarrow \left| \frac{1}{x^n} - 0 \right| < \varepsilon$$

$$\text{eligiendo } k = -\sqrt[n]{\frac{1}{\varepsilon}}$$

TEOREMA

Sea $f(x)$ una función, se cumple:

$$\text{I. } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{y \rightarrow 0^+} f(1/y)$$

$$\text{II. } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{y \rightarrow 0^-} f(1/y)$$

$$\text{III. } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{y \rightarrow 0} f(1/y)$$

Demostración

$$\text{I. } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{y \rightarrow 0^+} f(1/y)$$

$$\text{Sea } x = \frac{1}{y} \quad x \rightarrow \infty \Rightarrow y \rightarrow 0^+$$

$$\text{Sea } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists k \in \mathbb{R}$$

$$\text{tal que } x > k \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

$$\text{Tomando } x = \frac{1}{y} \Rightarrow y = \frac{1}{x}$$

$$\text{Si } x > k \Rightarrow \frac{1}{x} < \frac{1}{k} \Rightarrow y < \frac{1}{k} = \delta$$

$$\text{Si } 0 < y < \delta \Rightarrow \left| f\left(\frac{1}{y}\right) - b \right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{y \rightarrow 0^+} f(1/y) = b$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 &= \lim_{y \rightarrow 0^+} y \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 &= \lim_{y \rightarrow 0^-} y \end{aligned}$$

Ejemplo 1

$$\text{Calcular } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+4}{x-2}$$

Resolución:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{4}{x}}{1 - \frac{2}{x}} = \frac{3 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{x}}{1 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x}} = 3$$

Ejemplo 2

$$\text{Calcular } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-5}{\sqrt{x^2+3x-1}}$$

Resolución:

Dividiendo tanto numerador como denominador por x .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{5}{x}}{\sqrt{1 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}}} = \frac{2-0}{\sqrt{1+0-0}} = 2$$

Ejemplo 3

$$\text{Calcular } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-5}{\sqrt{x^2+3x-1}}$$

Resolución:Dividiendo por $-x$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{2x}{-x} - \frac{5}{-x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2} + \frac{3x}{x^2} - \frac{1}{x^2}}}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2 + \frac{5}{x}}{\sqrt{1 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}}} = \frac{-2 + 0}{\sqrt{1 + 0 - 0}} = -2$$

Ejemplo 4

Calcular $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(3x+2)^2(2x-8)^3}{7x^5 - 4x^3 + 2}$

Resolución:Dividiendo numerador y denominador por x^5 .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{(3x+2)^2}{x^2} \cdot \frac{(2x-8)^3}{x^3}}{\frac{7x^5 - 4x^3 + 2}{x^5}}$$

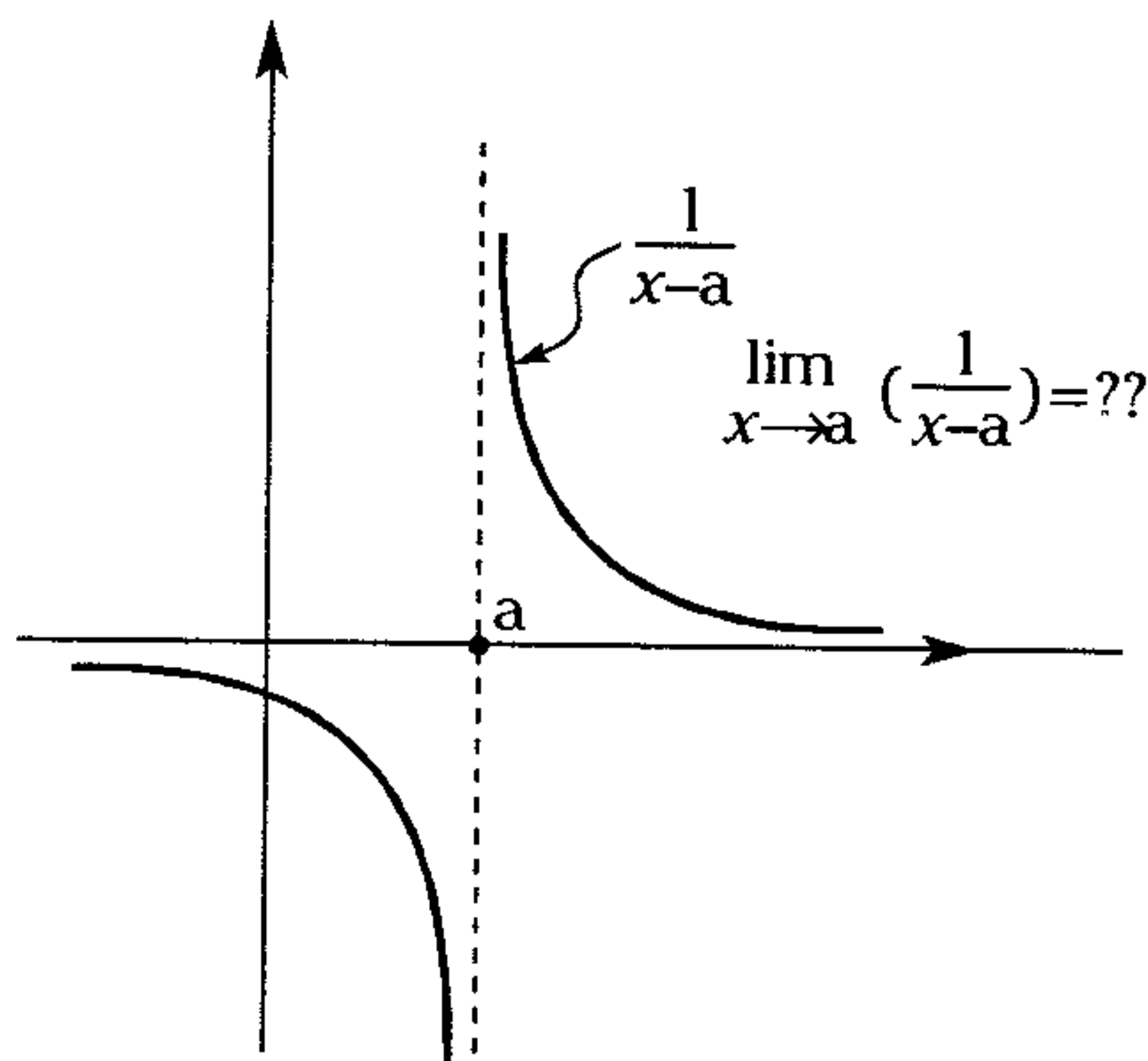
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(3 + \frac{2}{x}\right)^2 \left(2 - \frac{8}{x}\right)^3}{7 - \frac{4}{x^2} + \frac{2}{x^5}}$$

$$= \frac{(3+0)^2(2-0)^3}{7-0+0} = \frac{9 \times 8}{7} = \frac{72}{7}$$

Se dice que el límite de $f(x)$ es $-\infty$ o que $f(x)$ decrece infinitamente cuando x tiende al punto a y se escribe:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{R} \exists \delta > 0$$

$$\text{tal que } 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < k$$



I. $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{R} \exists \delta > 0$ tal que

$$a < x < a + \delta \Rightarrow f(x) < k$$

II. $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{R} \exists \delta > 0$ tal que

$$a < x < a + \delta \Rightarrow f(x) > k$$

LÍMITES INFINITOS

Se dice que el límite de $f(x)$ es $+\infty$ o que $f(x)$ crece ilimitadamente cuando x tiende al punto a y se escribe.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{R} \exists \delta > 0$$

$$\text{tal que } 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > k$$

III. $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$

$$a - \delta < x < a \Rightarrow f(x) > k$$

IV. $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$

$$a - \delta < x < a \Rightarrow f(x) < k$$

TEOREMA

Sean f y g funciones tales que:

A. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \wedge \lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$

Se cumple:

- $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \infty$
- $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = +\infty$ si $b > 0$
- $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = -\infty$ si $b < 0$
- $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

B. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \wedge \lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$

Se cumple:

- $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = -\infty$ si $b > 0$
- $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = +\infty$ si $b < 0$
- $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

TEOREMA

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \neq 0 \wedge \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$

se cumple:

a. Si $g(x) > 0 \quad \forall x \neq a$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} +\infty & \text{si } b > 0 \\ -\infty & \text{si } b < 0 \end{cases}$$

b. Si $g(x) < 0 \quad \forall x \neq a$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} -\infty & \text{si } b > 0 \\ +\infty & \text{si } b < 0 \end{cases}$$

Las mismas condiciones son válidas para los límites laterales.

Ejemplo 1

Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-x}{x^2}$

Resolución:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1-x) = 1 \neq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0, \quad g(x) = x^2 > 0 \quad \forall x \neq 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-x}{x^2} = +\infty$$

Ejemplo 2

Calcular $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x-6}{x^2-4}$

Resolución:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} (2x-6) = 2(2)-6 = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2-4) = 0 \quad x^2-4 > 0 \quad \forall x > 2$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x-6}{x^2-4} = -\infty$$

Ejemplo 3

Calcular $\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{\sin(x-2)}{(x-4)(x-2)^3}$

Resolución:

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} \sin(x-2) = \sin 2 > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} (x-4)(x-2)^3 = 0 \wedge (x-4)(x-2)^3 > 0 \quad \forall x > 4$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{\sin(x-2)}{(x-4)(x-2)^3} = +\infty$$

TEOREMA

Si $n \in \mathbb{N}$ se cumple:

I. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$

II. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^n} = \infty$ si n es par

III. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ es par} \\ -\infty & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$

TEOREMA

Sean f y g funciones tales que:

A. Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \wedge \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$

se cumple:

- $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = +\infty$

- $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = +\infty$

B. Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty \wedge \lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$

se cumple:

- $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = -\infty$

- $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = +\infty$

C. Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \wedge \lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$

se cumple:

- $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = -\infty$

Ejemplo 1

Calcular $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\lfloor x^2 \rfloor - 4}{x^2 - 4}$

Resolución:

Si $x \in [1, 2) \Rightarrow \lfloor x^2 \rfloor = \begin{cases} 1. \text{ Si } x^2 \in [1, 2) \\ 2. \text{ Si } x^2 \in [2, 3) \\ 3. \text{ Si } x^2 \in [3, 4) \end{cases}$

$\Rightarrow \lfloor x^2 \rfloor = \begin{cases} 1. \text{ Si } x \in [1, \sqrt{2}) \\ 2. \text{ Si } x \in [\sqrt{2}, \sqrt{3}) \\ 3. \text{ Si } x \in [\sqrt{3}, 2) \end{cases}$

Luego, $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\lfloor x^2 \rfloor - 4}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3 - 4}{x^2 - 4} = +\infty$

Ejemplo 2

Calcular $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x - 3}$

Resolución:

Si $x \rightarrow 3^+ \Rightarrow x > 3$

$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{\sqrt{x+3} \cdot \sqrt{x-3}}{\sqrt{x-3} \cdot \sqrt{x-3}} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-3}} = +\infty$

CÁLCULO DE LOS LÍMITES DE FORMAS INDETERMINADAS

Entre las formas indeterminadas tenemos:

$$\frac{0}{0}; \frac{\infty}{\infty}; \infty - \infty; 0^0; 0 \times \infty; 1^\infty$$

1. FORMA $\frac{0}{0}$

Si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ toma la forma $\frac{0}{0}$ se obtiene que:

$$f(a) = 0 \Rightarrow f(x) = (x-a)q(x)$$

$$g(a) = 0 \Rightarrow g(x) = (x-a)h(x)$$

Luego, se tendrá $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\cancel{(x-a)} q(x)}{\cancel{(x-a)} h(x)} = \frac{q(a)}{h(a)}$

Ejemplo 1

Calcular $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 + 2x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 5}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}$

Resolución:

Evaluando en $x=1$, vemos que la expresión toma la forma $\frac{0}{0}$

$\frac{1+2-3+5-5}{1-3+3-1} = \frac{0}{0}$, entonces el factor que lleva a la indeterminación en $x-1$ para lo cual necesitamos factorizar tanto el numerador como el denominador.

$$x^5 + 2x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 5$$

Por divisores binómicos.

$$\begin{array}{r|rrrrrr} 1 & 1 & 2 & -3 & 5 & 0 & -5 \\ & \downarrow & 1 & 3 & 0 & 5 & 5 \\ \hline & 1 & 3 & 0 & 5 & 5 & 0 \end{array}$$

$$\equiv (x-1)(x^4 + 3x^3 + 5x + 5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^4 + 3x^3 + 5x + 5)}{(x-1)^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 + 3x^3 + 5x + 5}{(x-1)^2}$$

Evaluando en $x=1$ se obtiene:

$$\frac{1+3+5+5}{(1-1)^2} = +\infty$$

Ejemplo 2

Calcular $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 1}{(x-1)^2}$

Resolución:

Evaluando en $x=1$ toma la forma $\frac{0}{0}$

Haciendo un cambio de variable

$$x = y^3 \Rightarrow \text{Si } x \rightarrow 1 \Rightarrow y \rightarrow 1$$

Se tiene:

$$\lim_{y \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{(y^3)^2} - 2\sqrt[3]{y^3} + 1}{(y^3 - 1)^2}$$

$$\lim_{y \rightarrow 1} \frac{\cancel{y^2} - 2y + 1}{(\cancel{y-1})^2 (y^2 + y + 1)^2} = \frac{1}{(1+1+1)^2} = \frac{1}{9}$$

Ejemplo 3

Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{\sqrt[3]{x+1} - 1}$

Resolución:

En $x=0$ toma la forma $\frac{0}{0}$

Asimismo, hagamos un cambio de variable.

$$x+1=t^6, \text{ si } x \rightarrow 0, t \rightarrow 1$$

Luego, se obtiene:

$$\lim_{t \rightarrow 1} \frac{\sqrt{t^6} - 1}{\sqrt[3]{t^6} - 1} = \lim_{t \rightarrow 1} \left(\frac{t^3 - 1}{t^2 - 1} \right)$$

$$\lim_{t \rightarrow 1} \frac{(\cancel{t-1})(t^2 + t + 1)}{(\cancel{t-1})(t+1)} = \frac{1+1+1}{1+1} = \frac{3}{2}$$

Ejemplo 4

Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\sin x} - \sqrt[3]{1-\sin x}}{x}$

Resolución:

Toma la forma $\frac{0}{0}$

Asimismo, el límite es equivalente a:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left[(\sqrt{1+\sin x} - 1) + (1 - \sqrt[3]{1-\sin x}) \right]$$

Calculando separadamente:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\sin x} - 1}{x} \cdot \frac{\sqrt{1+\sin x} + 1}{\sqrt{1+\sin x} + 1}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \operatorname{sen} x - 1}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{sen} x + 1}} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{sen} x + 1}} = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\
&\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[3]{1 - \operatorname{sen} x}}{x} \cdot \frac{1 + \sqrt[3]{1 - \operatorname{sen} x} + \sqrt[3]{1 - \operatorname{sen} x}}{1 + \sqrt[3]{1 - \operatorname{sen} x} + \sqrt[3]{1 - \operatorname{sen} x}^2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (1 - \operatorname{sen} x)}{x} \cdot \frac{1}{1 + \sqrt[3]{1 - \operatorname{sen} x} + \sqrt[3]{1 - \operatorname{sen} x}^2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \sqrt[3]{1 - \operatorname{sen} x} + \sqrt[3]{1 - \operatorname{sen} x}^2} \\
&= 1 \cdot \frac{1}{1 + 1 + 1} = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Luego, el límite pedido es: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$

Ejemplo 5

Calcular $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{|x^2 - 5x| - 6}{(3 - x)\sqrt{7 - |x + 4|}}$

Resolución:

Si $x \rightarrow 3^- \Rightarrow \begin{cases} x(x - 5) < 0 \\ x + 4 > 0 \end{cases}$

Luego:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{|x^2 - 5x| - 6}{(3 - x)\sqrt{7 - |x + 4|}} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{5x - x^2 - 6}{-(x - 3)\sqrt{7 - (x + 4)}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-(x - 3)(x - 2)}{-(x - 3)\sqrt{3 - x}} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \sqrt{3 - x} = 0 \wedge x - 2 > 0 \text{ si } x \rightarrow 3^-$$

Ejemplo 6

Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{2x + 1} - 2\sqrt{2x + 1} + 1}{4x^2 + 4x}$

Resolución:

Como vemos toma la forma $\frac{0}{0}$

Hagamos un cambio de variable

$$2x + 1 = t^6 \text{ si } x \rightarrow 0 \Rightarrow t \rightarrow 1$$

Se obtiene $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{2x + 1} - 2\sqrt{2x + 1} + 1}{(2x + 1)^2 - 1}$

$$\lim_{t \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{t^6} - 2\sqrt{t^6} + 1}{(t^6)^2 - 1} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^2 - 2t^3 + 1}{t^{12} - 1}$$

$$\lim_{t \rightarrow 1} \frac{-(t - 1)(2t^2 + t + 1)}{(t - 1)(t^{11} + t^{10} + \dots + t + 1)} = \frac{-4}{12} = -\frac{1}{3}$$

Ejemplo 7

Calcular $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 5x^2 + 3x + 9}{x^3 - 7x^2 + 15x - 9}$

Resolución:

Evaluando: $\frac{3^3 - 5 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 + 9}{3^3 - 7 \cdot 3^2 + 15 \cdot 3 - 9} = \frac{0}{0}$

Entonces hay que factorizar cada uno de los polinomios.

- $x^3 - 5x^2 + 3x + 9 \equiv (x - 3)^2(x + 1)$
- $x^3 - 7x^2 + 15x - 9 \equiv (x - 3)^2(x - 1)$

Luego, $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)^2(x + 1)}{(x - 3)^2(x - 1)} = \frac{4}{2} = 2$

Ejemplo 8

Calcular $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos x - \cos a}{x - a}$

Resolución:

Toma la forma $\frac{0}{0}$

Además recordemos que:

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \operatorname{sen} \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

En el problema se tiene:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{-2 \operatorname{sen}\left(\frac{x+a}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{x-a}{2}\right)}{(x-a)} \\ = -2 \lim_{x \rightarrow a} \operatorname{sen}\left(\frac{x+a}{2}\right) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{x-a}{2}\right)}{2\left(\frac{x-a}{2}\right)} \\ = -\operatorname{sen}\left(\frac{a+a}{2}\right) 1 = -\operatorname{sen} a \end{aligned}$$

Recordando que: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h} = 1$

Ejemplo 9

Calcular si existe:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{5}} \frac{\sqrt{\cos\left(\frac{5x}{3}\right) + 1}}{\sqrt{3\pi} - \sqrt{5x}}$$

Resolución:

Haciendo que $x = h + \frac{3\pi}{5}$

Si $x \rightarrow \frac{3\pi}{5} \Rightarrow h \rightarrow 0$ se tiene:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos\left(\frac{5}{3}\left(h + \frac{3\pi}{5}\right)\right) + 1}}{\sqrt{3\pi} - \sqrt{5\left(h + \frac{3\pi}{5}\right)}} \\ = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos\left(\frac{5}{3}h + \pi\right) + 1}}{\sqrt{3\pi} - \sqrt{5h + 3\pi}} \cdot \frac{\sqrt{3\pi} + \sqrt{5h + 3\pi}}{\sqrt{3\pi} + \sqrt{5h + 3\pi}} \\ = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos\left(\frac{5}{3}h\right)} \cdot \sqrt{3\pi} + \sqrt{5h + 3\pi}}{-5h} \end{aligned}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos\frac{5}{3}h}}{-5h} (\sqrt{3\pi} + \sqrt{5h + 3\pi}) \cdot \frac{\sqrt{1 + \cos\frac{5}{3}h}}{\sqrt{1 + \cos\frac{5}{3}h}}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos^2\frac{5}{3}h}}{-5h} \cdot \frac{\sqrt{3\pi} + \sqrt{5h + 3\pi}}{\sqrt{1 + \cos\frac{5}{3}h}}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left|\operatorname{sen}\left(\frac{5}{3}h\right)\right|}{-5h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3\pi} + \sqrt{5h + 3\pi}}{\sqrt{1 + \cos\frac{5}{3}h}}$$

$$= -\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left|\operatorname{sen}\left(\frac{5}{3}h\right)\right|}{3\left(\frac{5}{3}h\right)} \cdot \frac{2\sqrt{3\pi}}{\sqrt{2}}$$

Veamos si $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left|\operatorname{sen}\frac{5h}{3}\right|}{\frac{5}{3}h}$ existe

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\left|\operatorname{sen}\left(\frac{5h}{3}\right)\right|}{\frac{5h}{3}} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen}\frac{5h}{3}}{\frac{5}{3}h} = 1$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\left|\operatorname{sen}\left(\frac{5h}{3}\right)\right|}{\frac{5h}{3}} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-\operatorname{sen}\left(\frac{5h}{3}\right)}{\frac{5}{3}h} = -1$$

\therefore \nexists el límite

Ejemplo 10

Calcular

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\operatorname{sen}^3(3x-9) + \operatorname{sen}^2(2x-6)}{(x-3)(x^2-6x+10)}$$

Resolución:

Toma la forma $\frac{0}{0}$

Haciendo $x=h+3$, si $x \rightarrow 3 \Rightarrow h \rightarrow 0$ se obtiene:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin^3 3h + \sin^2 2h}{h(h^2 + 1)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2 + 1} \left(\frac{\sin^3 3h}{h} + \frac{\sin^2 2h}{h} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2 + 1} \left(27h^2 \frac{\sin^3 3h}{27h^3} + 4h \frac{\sin^2 2h}{4h^2} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1}{h^2 + 1} \right) \left[27h^2 \left(\frac{\sin 3h}{3h} \right)^3 + 4h \left(\frac{\sin 2h}{2h} \right)^2 \right] \\ &= 1 + (0 + 0) = 0 \end{aligned}$$

FORMA $\frac{\infty}{\infty}$

En este caso recordemos que:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{c}{x} = 0 \text{ si } c \neq 0$$

Ejemplo 1

Calcular $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 + 5x + 1}{13x^4 + 2x^2 + 7x - 1}$

Resolución:

Toma la forma $\frac{\infty}{\infty}$

Dividiendo numerador y denominador por x^4 se obtiene:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{5}{x^3} + \frac{1}{x^4}}{13 + \frac{2}{x^2} + \frac{7}{x^3} - \frac{1}{x^4}} &= \frac{3 + 0 + 0}{13 + 0 + 0 - 0} \\ &= \frac{3}{13} \end{aligned}$$

Ejemplo 2

Calcular $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt[5]{32x^5 - 5x + 1}}$

Resolución:

Es de la forma $\frac{\infty}{\infty}$

Dividiendo por x al numerador y denominador, se obtiene:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[5]{32 - \frac{5}{x^4} + \frac{1}{x^5}}} = \frac{1}{\sqrt[5]{32 - 0 + 0}} = \frac{1}{2}$$

TEOREMA

Si $L = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_m}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_n}$

Se tendrá que:

$$L = \begin{cases} 0 & \text{si } m < n \\ \frac{a_0}{b_0} & \text{si } m = n \\ +\infty & \text{si } m > n \wedge \frac{a_0}{b_0} > 0 \\ -\infty & \text{si } m > n \wedge \frac{a_0}{b_0} < 0 \end{cases}$$

Ejemplo 3

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + 5x - 1}{6x^2 - 5x + 3} = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2}x + 7}{6x^2 + 1} = 0$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3}x^2 + 5x - 2}{2x^2 - x + 9} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2 - 3x^5 + 3}{x^4 - 2x + 1} = -\infty$

Ejemplo 4

Calcular $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3\operatorname{sen} 2x + 7\cos x^2}{1+x^2}$

Resolución:

Como $-1 \leq \operatorname{sen} 2x \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$-1 \leq \cos x^2 \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3\operatorname{sen} 2x + 7\cos x^2}{1+x^2} = 0$$

Ejemplo 5

Calcular $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2+x+2} - \sqrt{x^4+x^2+2}}{\sqrt{x^4+x+1} + \sqrt[3]{x^2+x+1}}$

Resolución:

Toma la forma $\frac{-\infty}{\infty}$

Dividiendo numerador y denominador por x^2 , se obtiene:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{\frac{x^2+x+2}{x^6}} - \sqrt{\frac{x^4+x^2+2}{x^4}}}{\sqrt{\frac{x^4+x+1}{x^4}} + \sqrt[3]{\frac{x^2+x+1}{x^6}}} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{\frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5} + \frac{2}{x^6}} - \sqrt{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^4}}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4}} + \sqrt[3]{\frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5} + \frac{1}{x^6}}} \\ = \frac{\sqrt[3]{0+0+0} - \sqrt{1+0+0}}{\sqrt{1+0+0} + \sqrt[3]{0+0+0}} = -1 \end{aligned}$$

3. FORMA $\infty - \infty$

Su cálculo es similar a la forma $\frac{\infty}{\infty}$

Ejemplo 1

Calcular $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3-3}{x^2+1} - \frac{x^4+1}{x^3-1} \right)$

Resolución:

Toma la forma $\infty - \infty$

Efectuando la diferencia de fracciones se obtiene

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^3-3)(x^3-1) - (x^4+1)(x^2+1)}{(x^2+1)(x^3-1)}$$

Simplificando

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4x^3 - x^4 - x^2 + 2}{(x^2+1)(x^3-1)} = 0$$

Ejemplo 2

Calcular $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} - x \right)$

Resolución:

Toma la forma $\infty - \infty$

Efectuando

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1 \right) \\ = \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{x - \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} \right) \left(\frac{x + \sqrt{x^2+1}}{x + \sqrt{x^2+1}} \right) \\ = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(x^2 - x^2 - 1)}{\sqrt{x^2+1}(x + \sqrt{x^2+1})} \\ = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x}{\sqrt{x^2+1}(x + \sqrt{x^2+1})} = 0 \end{aligned}$$

Ejemplo 3

Calcular $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2-5x+6} - x)$

Resolución:

Toma la forma $\infty - \infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2-5x+6} - x) \frac{\sqrt{x^2-5x+6} + x}{\sqrt{x^2-5x+6} + x}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cancel{x^2} - 5x + 6 - \cancel{x^2}}{\sqrt{x^2 - 5x + 6} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-5x + 6}{\sqrt{x^2 - 5x + 6} + x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x + \frac{6}{x}}{\sqrt{1 - \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2}} + 1} = -\frac{5}{2}
 \end{aligned}$$

4. FORMA $0 \times \infty$

Se hacen las operaciones correspondientes.

Ejemplo 1

Calcular $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{5x-1} - \frac{1}{4x+1} \right) \left(\frac{\sqrt{x}-1}{x^2-4} \right)$

Resolución:

Toma la forma $0 \times \infty$ y que evaluando se tuvo

$$\left(\frac{1}{9} - \frac{1}{9} \right) \frac{\sqrt{2}-1}{4-4} = 0 \sqrt{2}$$

Efectuando las operaciones:

$$\begin{aligned}
 &\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{4x+1-5x+1}{(5x-1)(4x+1)} \right) \frac{\sqrt{x}-1}{(x+2)(x-2)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-(\cancel{x-2})}{(5x-1)(4x+1)} \frac{\sqrt{x}-1}{(x+2)(\cancel{x-2})}
 \end{aligned}$$

Luego, evaluando $\frac{-(\sqrt{2}-1)}{9 \cdot 9 \cdot 4} = \frac{1-\sqrt{2}}{324}$

Ejemplo 2

Calcular $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} - 1 \right) x^2$

Resolución:

Toma la forma $0 \times \infty$ ya que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = 1$$

Luego, efectuando:

$$\begin{aligned}
 &\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x - \sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}} \right) x^2 \cdot \frac{x + \sqrt{x^2-1}}{x + \sqrt{x^2-1}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[x^2 - (x^2-1)] x^2}{\sqrt{x^2-1} (x + \sqrt{x^2-1})} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1} (x + \sqrt{x^2-1})}
 \end{aligned}$$

Dividiendo por x^2

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}} \left(1 + \sqrt{1-\frac{1}{x^2}} \right)} = \frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{2}$$

5. FORMA 1^∞ **EL NÚMERO e**

El número e se define como.

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

Como $S_n = 1 + 1 + \frac{1}{2 \cdot 1} + \frac{1}{3 \cdot 2 \cdot 1} + \dots + \frac{1}{n(n-1) \dots 1}$

$$< 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} < 3$$

La serie converge y tiene sentido la definición. De hecho la serie converge muy rápidamente y nos permite calcular e con mucha precisión. Es interesante observar que también puede ser definido e por medio de otro proceso de límites.

TEOREMA

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e$$

Demostración:

$$\text{Sean: } S_n = \sum \frac{1}{k!}, \quad t_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Por la fórmula del binomio:

$$t_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)$$

Por lo tanto, $t_n \leq S_n$ de modo que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup(t_n) \leq e$$

Además, si $n \geq m$

$$t_n \geq 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{3}{n}\right) \dots$$

$$\dots + \frac{1}{m!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{m-1}{m}\right)$$

Si $n \rightarrow \infty$ conservando m fijo, tenemos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf t_n \geq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{m!}$$

De modo que $S_m \leq \inf t_n$

Si $m \rightarrow \infty$ tenemos finalmente:

$$e \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \inf t_n$$

La rapidez con que converge la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ puede comprobarse como sigue.

Si S_n tiene el mismo significado que anteriormente, tendremos:

$$e - S_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \dots$$

$$< \frac{1}{(n+1)!} \left\{ 1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots \right\} = \frac{1}{n!n}$$

De modo que $0 < e - S_n < \frac{1}{n!n}$

Así, por ejemplo S_{10} da una aproximación de e con un error menor que 10^{-7} .

TEOREMA

e es irracional

Demostración:

Usaremos el método de la contradicción.

Supongamos que e es racional.

Sea $e = \frac{p}{q}$, con p, q enteros positivos y primos entre sí.

Por lo demostrado anteriormente:

$$0 < e - S_q < \frac{1}{q!q} \Rightarrow 0 < q!(e - S_q) < \frac{1}{q}$$

Por la hipótesis eq es entero.

Como $q!S_1 = q! \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{q!} \right)$ es entero

Como $q \geq 1$ implica la existencia de un entero entre 0 y 1, con lo que hemos llegado a una contradicción.

$\therefore e$ no es racional.

Se demostró que la sucesión $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ es creciente

y acotada, entonces la sucesión es convergente es decir, tiene límite, se demuestra bastante rápida y se puede calcular con la aproximación que se desee, con lo que se halla $e = 2,718281828459\dots$

$$e = \lim_{h \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{h}\right)^h$$

$$\text{Haciendo } h = \frac{1}{n} \Rightarrow e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

TEOREMA

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(1 + \frac{k}{h}\right)^h = \lim_{h \rightarrow 0} (1 + kh)^{1/h} = e^k \quad \forall k \in \mathbb{R}$$

Ejemplo 1

Calcular $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+1} \right)^{2x}$

Resolución:

Vemos que este límite toma la forma 1^∞

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-1}{2x+1} = \frac{2}{2} = 1$$

Estos límites se calculan usando la definición de e y el teorema anterior.

Haciendo $2x=h$ $x \rightarrow \infty, h \rightarrow \infty$ se obtiene:

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \left(\frac{h-1}{h+1} \right)^h = \lim_{h \rightarrow \infty} \left(\frac{1+\frac{-1}{h}}{1+\frac{1}{h}} \right)^h$$

$$= \frac{\lim_{h \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-1}{h} \right)^h}{\lim_{h \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{h} \right)^h} = \frac{e^{-1}}{e} = e^{-2}$$

Ejemplo 2

Calcular $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \sin x)^{1/x}$

Resolución:

Toma la forma 1^∞

Recordando que $\lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^{\frac{1}{h}} = e$

Transformando se tiene:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[(1 + \sin x)^{\frac{1}{\sin x}} \right]^{\frac{\sin x}{x}}$$

Haciendo $\sin x = h$ como $x \rightarrow 0 \Rightarrow h \rightarrow 0$

Tendremos:

$$\left[\lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^{\frac{1}{h}} \right]^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}} = e^1 = e$$

Ejemplo 3

Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)$

Resolución:

Toma la forma 1^∞

De $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$

Entonces:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} &= \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin^2 x)^{\frac{1}{2x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[(1 - \sin^2 x)^{\frac{1}{\sin^2 x}} \right]^{\frac{\sin^2 x}{2x^2}} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[(1 - h)^{\frac{1}{h}} \right]^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2} = (e^{-1})^{1/2} \\ &= \frac{\sqrt{e}}{e} \end{aligned}$$

Para hallar los límites de la forma:

$$\lim_{x \rightarrow a} [\varphi(x)^{\psi(x)}] = c$$

debe tenerse en cuenta que:

1. Si existen los límites finitos

$$\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = A \wedge \lim_{x \rightarrow a} \psi(x) = B$$

se tiene $c = A^B, A > 0$

2. Si $\lim_{x \rightarrow a} \psi(x) = A \neq 1 \wedge \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = \pm \infty$

Tener en cuenta que:

$$A^\infty = \begin{cases} \infty & \text{si } A > 1 \\ 0 & \text{si } A < 1 \end{cases}$$

3. Si $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 1 \wedge \lim_{x \rightarrow a} \psi(x) = \infty$

Se supone que $\psi(x) = 1 + \alpha(x)$

Cuando $\alpha(x) \rightarrow 0$ con $x \rightarrow a$ y, por consiguiente:

$$\begin{aligned} c &= \left[\lim_{x \rightarrow a} (1 + \alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}} \right]^{\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) \psi(x)} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) \psi(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} (\psi(x) - 1) \psi(x)} \end{aligned}$$

siendo e el número de Neper.

Ejemplo 1

Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2+x}{3x+3} \right)^{\frac{4}{x}}$

Resolución:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2+x}{3x+3} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2+x}{3x+3} \right)^{\frac{4}{x}} = +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2+x}{3x+3} \right)^{\frac{4}{x}} = \left(\frac{2}{3} \right)^{\infty} = +\infty$$

Ejemplo 2

Calcular $C = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{4x+3}{7x+2} \right)^{\frac{3x}{6x-x^2+x^3}}$

Resolución:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x+3}{7x+2} = \frac{3}{2}$$

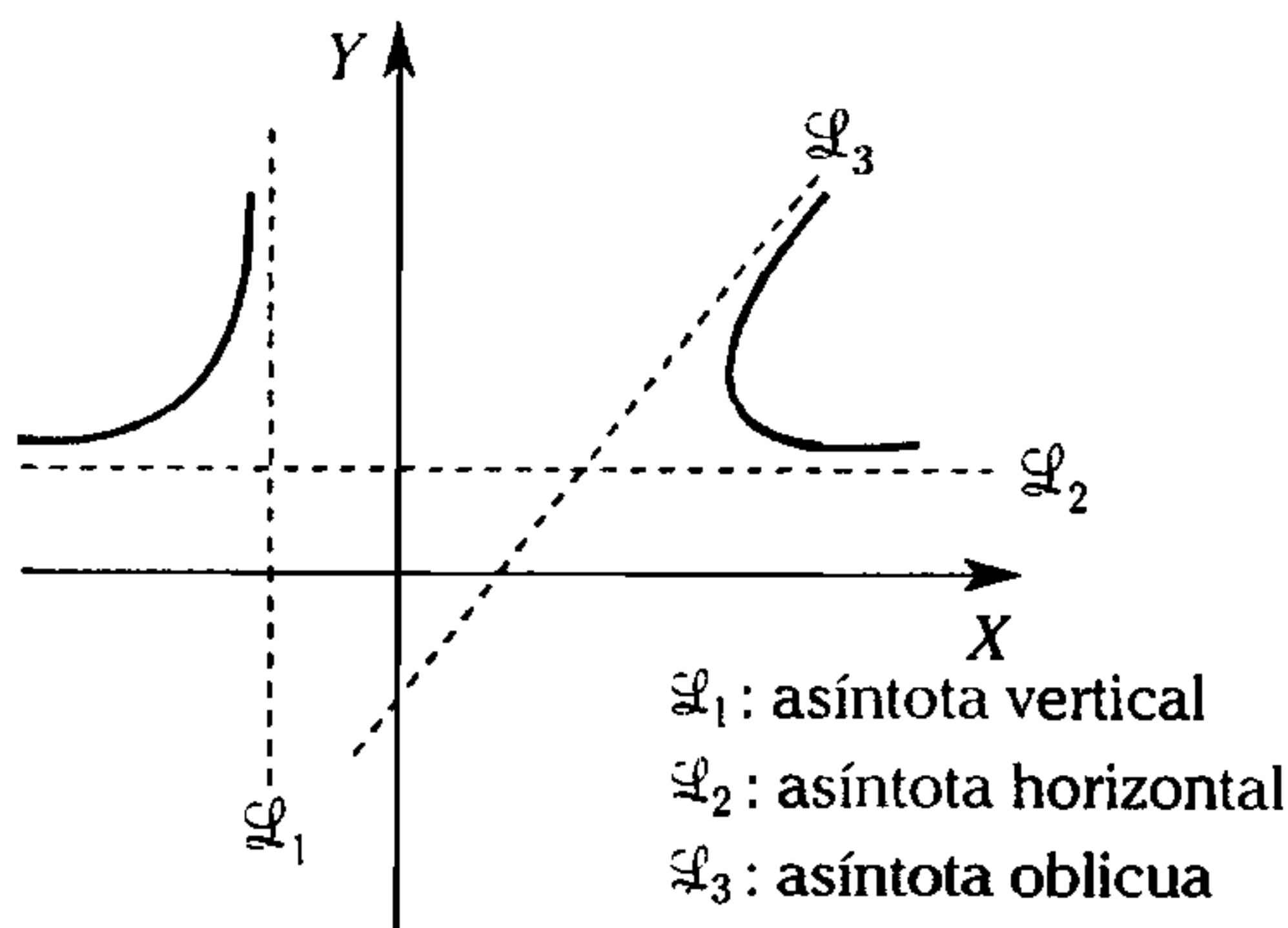
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{6x-x^2+x^3} = \infty$$

$$\Rightarrow C = \left(\frac{3}{2} \right)^{\infty} = \infty$$

ASÍNTOTAS

Las asíntotas son líneas rectas que, prolongadas indefinidamente, se acercan a una curva sin alcanzarla.

Veamos el gráfico:

**1. ASÍNTOTA HORIZONTAL**

Se dice que la recta horizontal $y=b$ es una "asíntota horizontal" del gráfico de $y=f(x)$ si:

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) ; b = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

2. ASÍNTOTA VERTICAL

Se dice que la recta vertical $x=a$ es una asíntota vertical del gráfico de $y=f(x)$ si:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \vee \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty \vee \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty \vee \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$$

3. ASÍNTOTA OBLICUA

I. La recta $y=mx+b$ es una asíntota oblicua derecha del gráfico de $y=f(x)$.

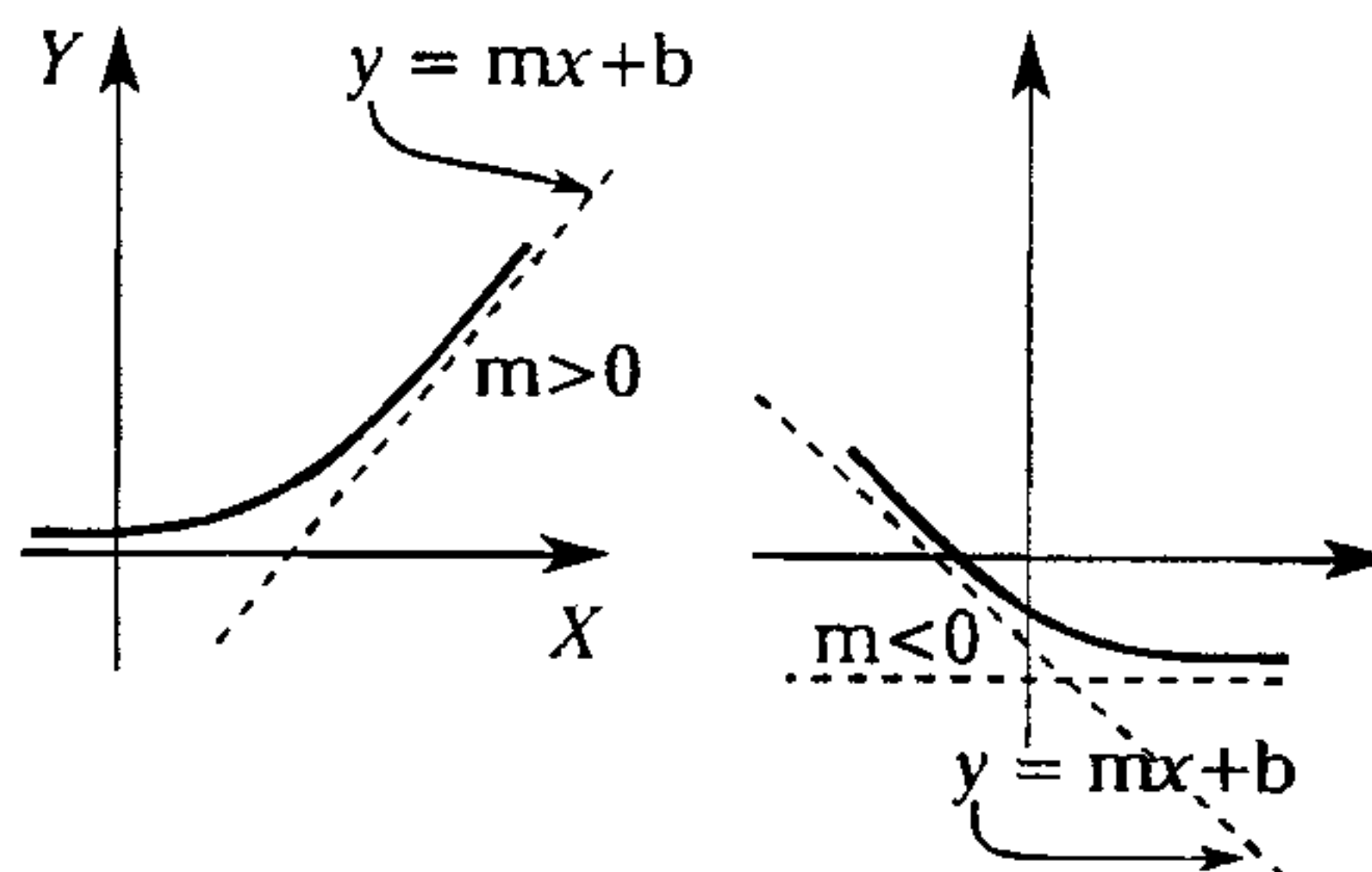
$$\text{Si: } m = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{f(x)}{x} \right), m \in \mathbb{R} - \{0\}$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx), b \in \mathbb{R}$$

II. La recta $y=mx+b$ es una "asíntota oblicua izquierda" del gráfico de $y=f(x)$.

$$\text{Si } m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}, m \in \mathbb{R} - \{0\}$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - mx)$$



Ejemplo 1

Determinar las asíntotas del gráfico de:

$$y = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 4}} + x - 2$$

Resolución:**a. Asíntotas horizontales**

Hallando su límite

$$\begin{aligned} \bullet \quad \lim_{x \rightarrow \infty} y &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 4}} + x - 2 \right) = +\infty \\ \bullet \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} y &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 4}} + x - 2 \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 - x\sqrt{x^2 - 4}}{\sqrt{x^2 - 4}} \right) - 2 \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(x - \sqrt{x^2 - 4})(x + \sqrt{x^2 - 4})}{\sqrt{x^2 - 4}(x + \sqrt{x^2 - 4})} - 2 \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x}{\sqrt{x^2 - 4}(x + \sqrt{x^2 - 4})} - 2 = -2 \end{aligned}$$

Entonces $y = -2$ es asíntota horizontal.

b. Asíntotas verticales

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 4}} + x - 2 &= \infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 4}} + x - 2 &= +\infty \end{aligned}$$

Entonces $x = 2$, $x = -2$ son asíntotas verticales del gráfico.

c. Asíntotas oblicuas

I. Sea $y = mx + b$ una asíntota oblicua derecha. Hallemos m y b .

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 4}} + x - 2 \right)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}} + 1 - \frac{2}{x} \right) = 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 4}} + x - 2 - mx \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 4}} + x - 2 - 2x \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(x - \sqrt{x^2 - 4})}{\sqrt{x^2 - 4}} - 2 \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(x - \sqrt{x^2 - 4})(x + \sqrt{x^2 - 4})}{\sqrt{x^2 - 4}(x + \sqrt{x^2 - 4})} - 2 \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x}{\sqrt{x^2 - 4}(x + \sqrt{x^2 - 4})} - 2 = -2 \end{aligned}$$

Luego, $y = 2x - 2$ es una asíntota oblicua derecha.

II. Sea $y = m_1x + b_1$ una asíntota oblicua izquierda.

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 4}} + x - 2 \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}} + 1 - \frac{2}{x} \right) \\ &= -1 + 1 - 0 = 0 \\ \Rightarrow &\text{no tiene asíntota oblicua izquierda.} \end{aligned}$$

Ejemplo 2

Hallar las asíntotas de la función $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

Resolución:**a. Asíntotas horizontales**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} &\text{ no existe} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sin x}{x} &\text{ no existe} \end{aligned}$$

Entonces, no existe asíntotas horizontales.

b. Asíntotas verticales

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm a} \frac{\sin x}{x} &= \infty \quad \nexists a \\ \lim_{x \rightarrow \pm a} \frac{\sin x}{x} &= -\infty \quad \nexists a \end{aligned}$$

Luego, y no tiene asíntotas verticales.

c. **Asíntotas oblicuas** ($y=mx+b$)

$$m = \frac{\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} \right)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2} \nexists$$

Luego, y no tiene asíntotas oblicuas.

Ejemplo 3

Hallar las asíntotas de las siguientes funciones:

$$1. \quad f(x) = \frac{3x}{(x-3)(x+2)}$$

$$2. \quad f(x) = \frac{\sqrt{7-x}+3}{x^2-4}$$

$$3. \quad f(x) = x - \frac{1}{2} \operatorname{sen} x$$

$$4. \quad f(x) = \frac{\sqrt{3x-4}}{\sqrt{x(x+2)}}$$

Resolución:

Veamos para 1

a. **Asíntotas horizontales**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{(x-3)(x+2)} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{(x-3)(x+2)} = -\infty$$

b. **Asíntotas verticales**

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x}{(x-3)(x+2)} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x}{(x-3)(x+2)} = -\infty$$

$$\therefore x=3 \wedge x=-2$$

c. **Asíntotas oblicuas**

$$y = mx + b$$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} x \frac{3x}{x(x-3)(x+2)} = +\infty$$

$\therefore \nexists$ asíntotas oblicuas.

Estudiante ponga en práctica lo aprendido en 2, 3 y 4.

Ejemplo 4

Hallar las asíntotas de la función $xy - x - 2 = 1$

Resolución:

Despejando y :

$$y = \frac{x+2}{x}$$

a. **Asíntotas horizontales**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+2}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x} \right) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{2}{x} \right) = 1$$

Entonces, $y=1$ es una asíntota horizontal.

b. **Asíntotas verticales**

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+2}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x+2}{x} = -\infty$$

Entonces, $x=0$ es una asíntota vertical.

c. **Asíntotas oblicuas**

$$m = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x} \right)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x^2} \right) = 0$$

y no posee asíntotas oblicuas.

Ejemplo 5

Hallar las asíntotas de la función:

$$f(x) = \frac{x^2+3}{\sqrt{x^2-4}}$$

y bosquejar su gráfica.

Resolución:

Halleemos el dominio de la función:

$$x^2 - 4 > 0 \Rightarrow (x+2)(x-2) > 0$$

$$\Rightarrow x \in \langle -\infty, -2 \rangle \cup \langle 2, +\infty \rangle$$

Sus asíntotas

a. ~~Asíntotas horizontales~~

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3}{\sqrt{x^2 - 4}} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 3}{\sqrt{x^2 - 4}} = +\infty$$

Entonces, no tiene asíntotas horizontales.

b. **Asíntotas verticales**

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 + 3}{\sqrt{x^2 - 4}} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2 + 3}{\sqrt{x^2 - 4}} = +\infty$$

Entonces, $x=2 \wedge x=-2$ son asíntotas verticales del gráfico de f .c. **Asíntotas oblicuas** ($y=mx+b$)

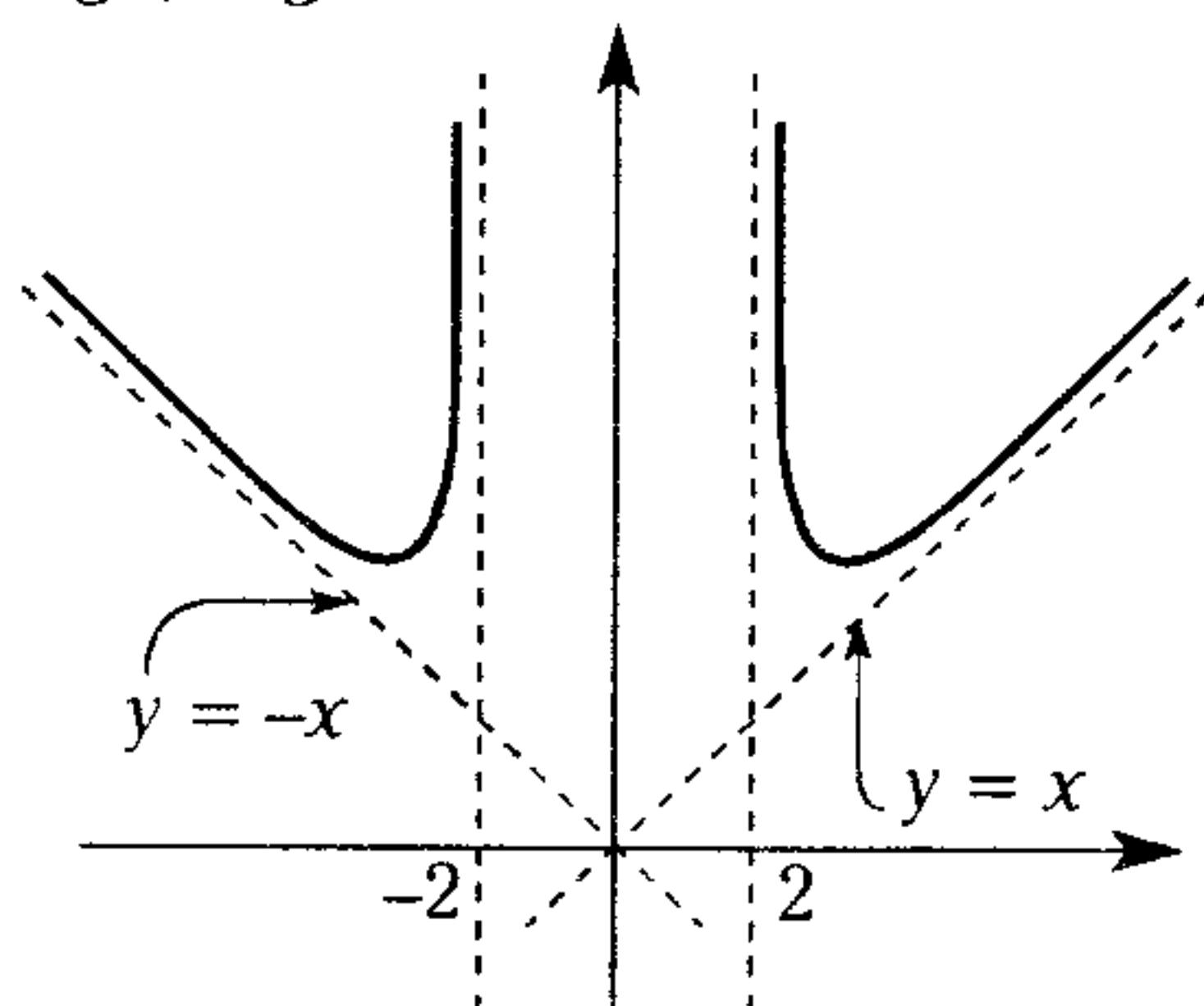
$$\text{I. } m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3}{x\sqrt{x^2 - 4}} = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 2}{\sqrt{x^2 - 4}} - x \right) = 0$$

Entonces, $y=x$ es una asíntota oblicua derecha.

$$\text{II. } m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2}{x\sqrt{x^2 - 4}} = -1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 + 2}{\sqrt{x^2 - 4}} + x \right) = 0$$

Entonces, $y=-x$ es una asíntota oblicua izquierda.Luego, la gráfica de f es:**Ejemplo 6**

Gráfica de la función

$$f(x) = \sqrt[3]{(x-5)(x^2 + 8x + 16)}$$

Resolución:La función es $f(x) = \sqrt[3]{(x-5)(x+4)^2}$ a. **Asíntotas horizontales**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

Luego, f no tiene asíntotas horizontales.b. **Asíntotas verticales**

$$\lim_{x \rightarrow \pm a} f(x) = +\infty \nexists a$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm a} f(x) = -\infty \nexists a$$

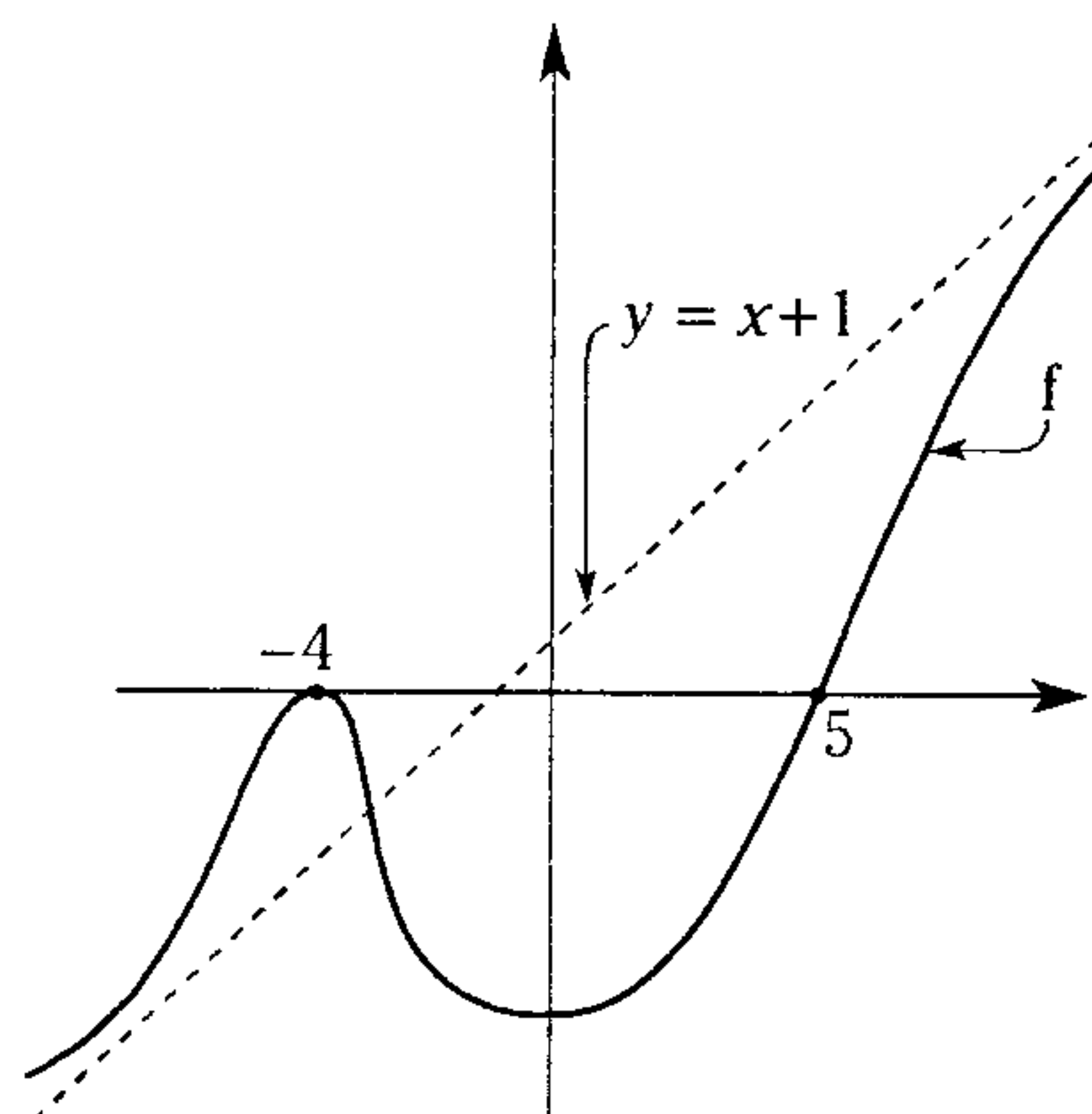
Entonces, f no tiene asíntotas verticales.c. **Asíntotas oblicuas** ($y=mx+b$)

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \sqrt[3]{\frac{(x-5)(x+4)^2}{x}} = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left(\sqrt[3]{(x-5)(x+4)^2} - x \right) = 1$$

Entonces, $y=x$ es una asíntota oblicua derecha.

Luego, su gráfica es:



CONTINUIDAD

CONTINUIDAD EN UN PUNTO

Sea $f(x)$ una función definida en todos los puntos x de un intervalo abierto I y sea $x_0 \in I$, se dice que $f(x)$ es continua en el punto $x=x_0$ si:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Observaciones:

1. Para que la función $f(x)$ sea continua en el punto x_0 se necesita explícitamente que se cumplan simultáneamente las siguientes tres condiciones:

a. $f(x)$ está definida en x_0 , es decir $f(x_0)$ existe, $x_0 \in \text{Dom} f$

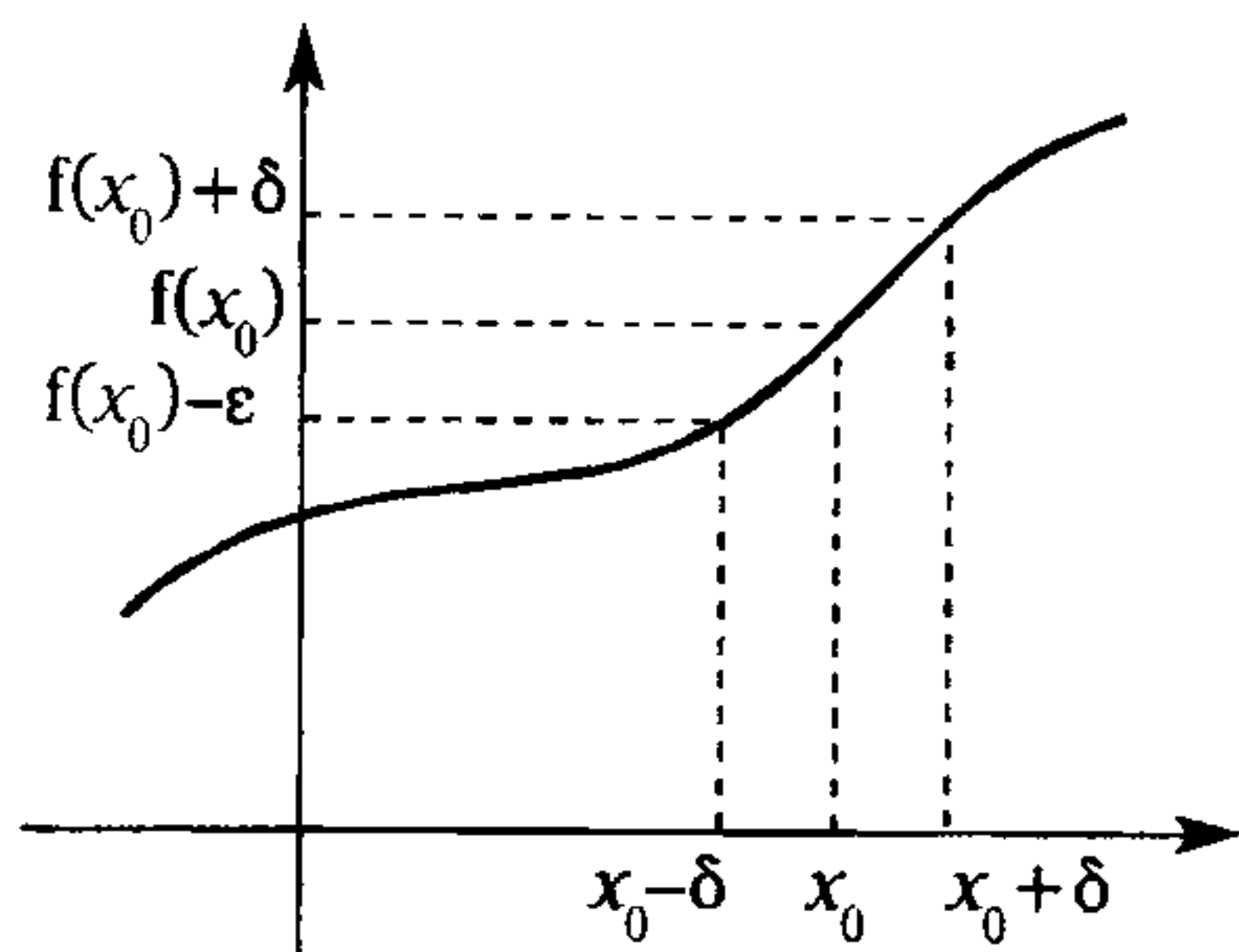
b. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existe

c. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

2. Para que $f(x)$ sea continua en el punto x_0 se requiere que exista el valor $f(x_0)$ y que $\forall \varepsilon > 0$

$$\exists \delta > 0 / |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

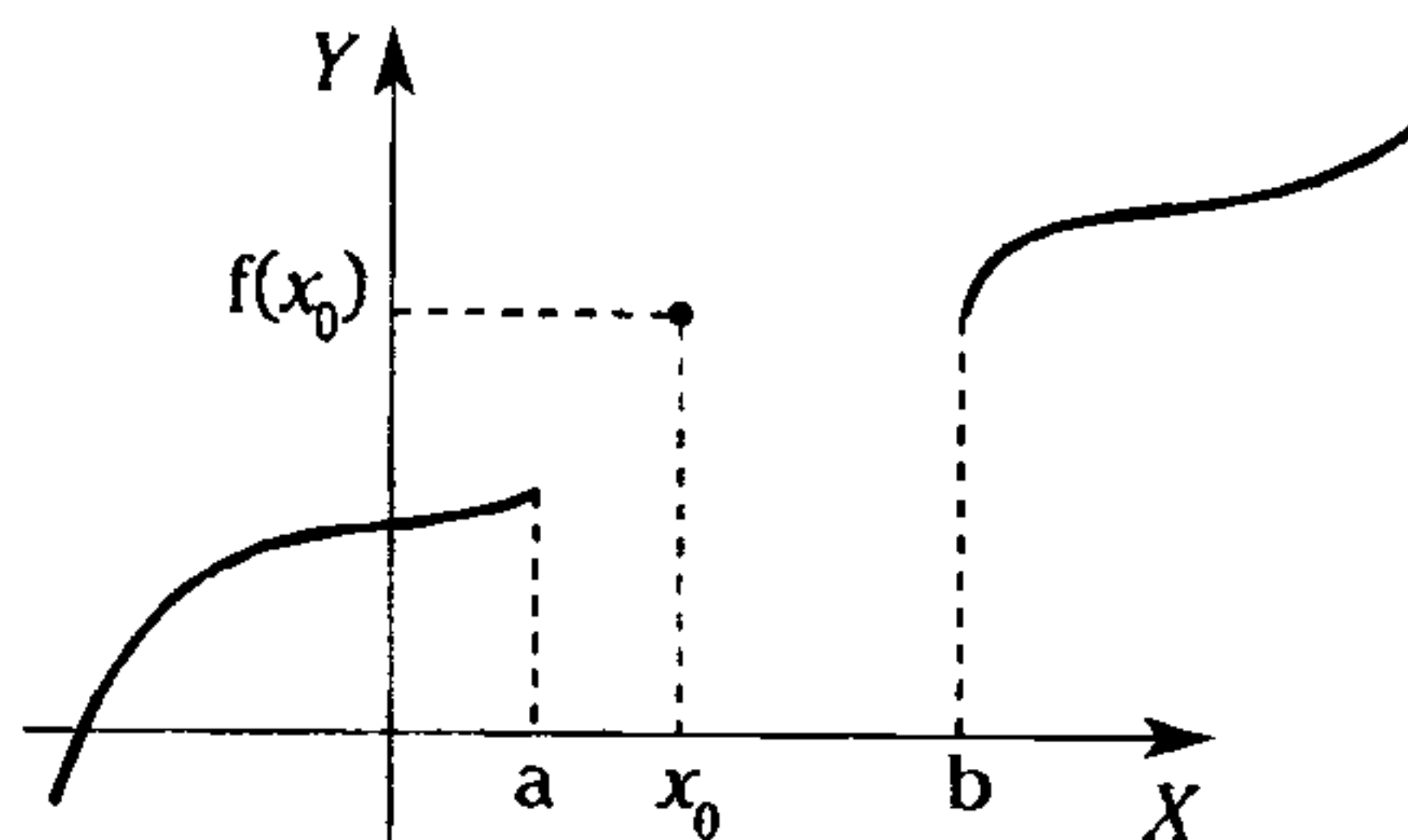
(Si x_0 es un punto de acumulación del dominio de f)



no necesita de la restricción $|x - x_0| > 0$ ya que

claramente se cumple $|f(x) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon$

3. Si $x_0 \in \text{Dom} f$ y no es un punto de acumulación del $\text{Dom} f$, entonces, f es continua en x_0 .



$\exists \delta > 0$, tal que el único punto que satisface $|x - x_0| < \delta$ es x_0 y $|f(x) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon$ $\forall \varepsilon > 0$

4. $f(x)$ no es continua en el punto x_0 si no se cumple al menos una de las condiciones de la observación (1) y, en tal caso, decimos que $f(x)$ es discontinua en el punto x_0 .

CONTINUIDAD EN UN INTERVALO

Se dice que una función $f(x)$ es continua en un intervalo abierto I , si f es continua en cada punto x_0 del intervalo I .

Ejemplo 1

$f(x) = \frac{1}{x}$ es continua en $x = x_0 = 2$

$$2 \in \text{Dom} f, \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x} = f(2) = \frac{1}{2}$$

$f(x)$ es continua en $x = x_0 \quad \forall x_0 \neq 0$

Ejemplo 2

¿ $f(x) = \sqrt{x-1}$, $f(x)$ es continua en $x=1$?

Resolución:

$\text{Dom} f = [1; +\infty >$

$1 \in \text{Dom } f$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ existe

$$f(1)=0=\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$$

Entonces f es continua en $x=1$ por la derecha.

Se dirá f es continua $\forall x_0 \geq 1$

Ejemplo 3

$$¿f(x)=\frac{x^2-2x+1}{x-1}, \text{ es continua en } x=1?$$

Resolución:

I. $1 \notin \text{Dom } f$

II. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$

III. $f(1) \neq 0, f(1) \nexists$

Entonces, f es discontinua en $x=1$. Aunque se puede evitar la discontinuidad redefiniendo la función como:

$$f(x)=\begin{cases} \frac{x^2-2x+1}{x-1}, & \text{si } x \neq 1 \\ 0 & , \text{ si } x=1 \end{cases}$$

Veamos:

I. $1 \in \text{Dom } f$

II. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$

III. $f(1)=0=\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

Con esta nueva definición, f es continua en $x=1$.

Si la función f queda definida así:

$$f(x)=\begin{cases} \frac{x^2-2x+1}{x-1}, & \text{si } x \neq 1 \\ 2 & , \text{ si } x=1 \end{cases}$$

su discontinuidad en 1 es inevitable.

Ejemplo 4

¿La función $f(x)=\begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 1 \\ -1 & \text{si } x < 1 \end{cases}$ es continua en $x=1$?

Resolución:

I. $1 \in \text{Dom } f$

II. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ no existe

III. $f(1)=1 \neq \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

$\Rightarrow f(x)$ no es continua en $x=1$

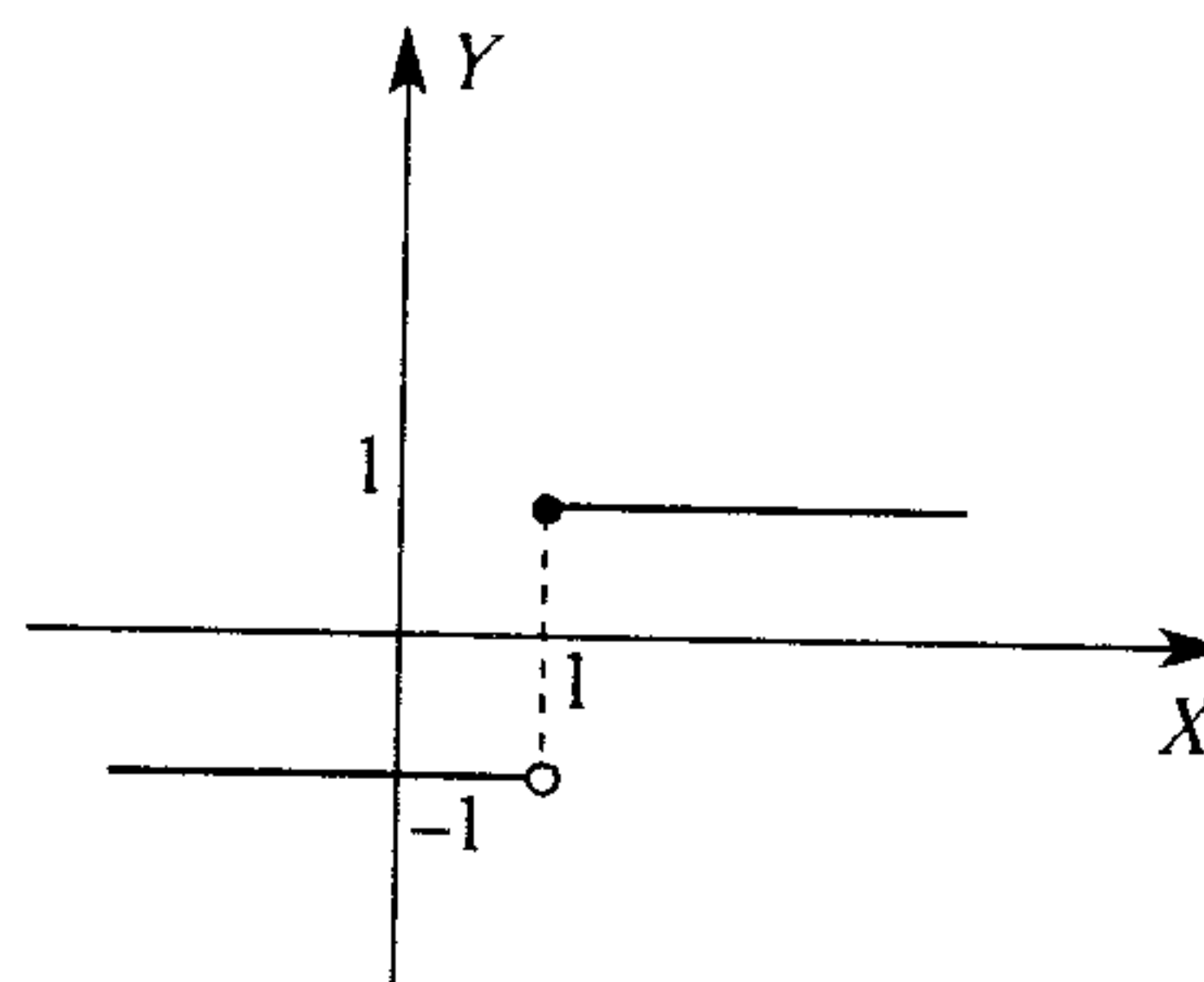
Sin embargo

I. $1 \in \text{Dom } f$

II. $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$

III. $f(1)=\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

Entonces $f(x)$ es continua por la derecha.



Ejemplo 5

Redefina la función $f(x)=\frac{\text{sen } x}{x}$ para que sea continua en $x=0$.

Resolución:

I. $0 \in \text{Dom } f$

II. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\text{sen } x}{x} \right) = 1$

con lo cual $f(x)$ es continua en todo $x_0 \neq 0$

Luego, para que f sea continua se debe definir así:

$$f(x)=\begin{cases} \frac{\text{sen } x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Propiedades de la preservación de la continuidad

Sean $f(x)$ y $g(x)$ funciones continuas en el punto $x=a$, entonces:

1. $f(x) \pm g(x)$ es continua en $x=a$
2. $f(x) \cdot g(x)$ es continua en $x=a$
3. $f(x)/g(x)$ es continua en $x=a$ siempre que $g(x) \neq 0$
4. $(f(x))^n$ es continua en $x=a$, $n \in \mathbb{N}$
5. $\sqrt[n]{f(x)}$ es continua en $x=a$ si $\sqrt[n]{f(x)}$ está definida.

TEOREMA

Sea f continua en un intervalo I_1 y g continua en un intervalo I_2 , entonces, $f \pm g$, $f \cdot g$, f/g , ($g(a) \neq 0$), son continuas en:

$$\forall a \in I_1 \cap I_2$$

FUNCIONES CONTINUAS IMPORTANTES

1. Función polinomial

$P(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n$ es continua para todo x real.

2. Función racional

$$f(x) = \frac{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n}{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m}$$

es continua $\forall x \in \mathbb{R}$, excepto en aquellos puntos donde el denominador se anula.

3. Funciones trigonométricas

- a. $\sin x, \cos x$ son continuas $\forall x \in \mathbb{R}$
- b. $\tan x, \sec x$ son continuas en todo x real siempre que $\cos x \neq 0$

$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}(2n+1), n \in \mathbb{Z}$$

- c. $\cot x, \csc x$ son continuas $\forall x \in \mathbb{R}$ siempre que $\sin x \neq 0$

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = n\pi, n \in \mathbb{Z}$$

TEOREMA

(Composición de funciones continuas)

Sean f y g funciones tales que existe $f \circ g$. Si g es una función continua en el punto x_0 , es decir, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0)$ y $f(x)$ es continua en el punto $g(x_0)$ se tendrá que:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f \circ g)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)\right) = f(g(x_0))$$

Esto es $f \circ g$ es continua en el punto x_0 .

También si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$ y $f(x)$ es continua en b :

$$\lim_{x \rightarrow a} (f \circ g)(x) = f\left(\lim_{x \rightarrow a} g(x)\right) = f(b)$$

Entonces $f \circ g$ es continua en $x=a$. Es decir, no es necesario que $g(x)$ sea continua en $x=a$ para que $(f \circ g)(x)$ sea continua en $x=a$.

Ejemplos:

$$f(x) = \sqrt{\sin x}$$

$$f(x) = (m \circ n)(x) \text{ con } m(x) = \sqrt{x}$$

$$n(x) = \sin x$$

f es continua en $\{x \in \mathbb{R} / \sin x \geq 0\} = A$

$$[0; \pi] \subset A$$

PUNTOS DE DISCONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN

Se dice que una función $f(x)$ es discontinua en el punto x_0 que pertenece al dominio o que es un punto frontera del dominio si en este punto no se verifica la condición de continuidad.

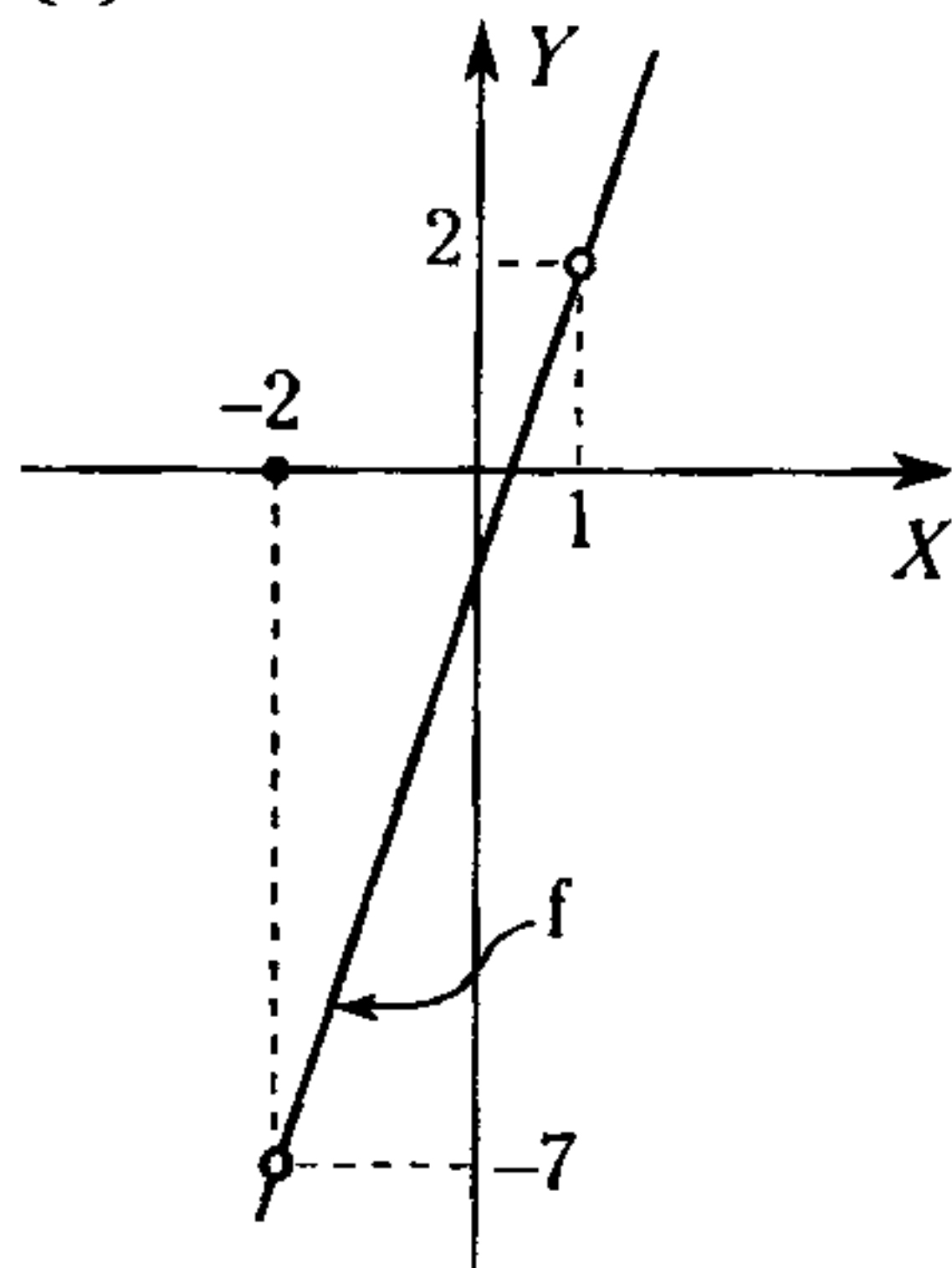
$$f(x) = \frac{(x-1)(x+2)(3x-1)}{(x-1)(x+2)}$$

Veamos:

$f(x)$ es discontinua en $x=1$ y $x=-2$ ya que $f(1)$ ni $f(-2)$ están definidas.

Luego, el equivalente de $f(x)$ es:

$$f(x) = 3x-1 \text{ con } x \neq 1 \wedge x \neq -2$$



Ejemplo 1

Analizar la continuidad de:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{5-x} & x < 5 \\ 0 & x = 5 \\ \frac{\sqrt[3]{\sqrt{x-1}-2} - \sqrt[3]{x^2-25}}{\sqrt[4]{x-5}} & x > 5 \end{cases}$$

Resolución:

a. Supongamos que $x < 5 \Rightarrow f(x) = \sqrt{5-x}$, $5-x > 0$

$\Rightarrow f$ es continua $\forall x < 5$

b. Supongamos que $x > 5$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{\sqrt[3]{\sqrt{x-1}-2} - \sqrt[3]{x^2-25}}{\sqrt[4]{x-5}}$$

$$x > 5 \Rightarrow x-1 > 4 \Rightarrow \sqrt{x-1} \text{ es continua } \forall x > 5$$

$$x > 5 \Rightarrow x^2-25 > 0 \Rightarrow \sqrt[3]{x^2-25} \text{ es continua } \forall x > 5$$

$$x > 5 \Rightarrow \sqrt{x-1}-2 > 0 \Rightarrow \sqrt[3]{\sqrt{x-1}-2} \text{ es continua } \forall x > 5$$

$$\therefore f(x) \text{ es continua } \forall x > 5$$

c. Sea $x=5 \Rightarrow f(x)=0 \Rightarrow f(5)=0$

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{\sqrt[3]{\sqrt{x-1}-2} - \sqrt[3]{x^2-25}}{\sqrt[4]{x-5}} = 0?$$

Haciendo $x-5=h$

Si $x \rightarrow 5 \Rightarrow h \rightarrow 0$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} f(h) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^-} \sqrt{5-x} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 0 = f(5) \Rightarrow f(x) \text{ es continua en } x=5.$$

De a, b y c f es continua en \mathbb{R} .

Ejemplo 2

Analizar la continuidad de:

a. $h(x) = \sin(x^2-x+2)$

b. $g(x) = \sin\left(\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$

Resolución:

a. Sea $m(x) = x^2-x+2$ es continua $\forall x \in \mathbb{R}$

$f(x) = \sin x$ es continua $\forall x \in \mathbb{R}$

Luego, $h(x) = f(m(x)) = \sin(x^2-x+2)$

$= \sin(x^2-x+2)$ es continua $\forall x \in \mathbb{R}$

b. $g(x) = \sin\left(\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$ es continua $\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$

CLASIFICACIÓN DE LAS DISCONTINUIDADES

Se dice que la función $f(x)$ tiene discontinuidad evitable o removible en el punto x_0 si:

- I. Existe $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$
- II. $f(x_0)$ no existe o si $f(x_0)$ existe y $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$

En tal caso definimos:

$$f(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq x_0 \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) & x = x_0 \end{cases}$$

La nueva función $f(x)$ resulta ser continua en el punto x_0 y se llama extensión o prolongación continua de $f(x)$ en el punto x_0 .

Ejemplo

$$f(x) = \begin{cases} |x-3| & x \neq 3 \\ -2 & x = 3 \end{cases}$$

Resolución:

$$f(x) = \begin{cases} x-3 & x > 3 \\ 3-x & x < 3 \\ -2 & x = 3 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (x-3) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (3-x) = 0$$

$$\text{De donde } \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 0$$

Fue una discontinuidad removible en $x=3$.

Se puede volver a definir de tal modo que resulte continua.

$$f(x) = \begin{cases} |x-3| & \text{si } x \neq 3 \\ 0 & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

Definición

Se dice que $f(x)$ tiene una **discontinuidad esencial** en el punto x_0 si se cumple:

- I. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ no existe
- II. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ es infinito

Ejemplos:

$$1. \quad f(x) = \begin{cases} 2-x & x \geq 1 \\ x+2 & x < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 3$$

$$\Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

Entonces la discontinuidad es esencial.

$$2. \quad f(x) = \frac{1}{x-4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = -\infty$$

Entonces en $x=4$ es una discontinuidad esencial.

$$3. \quad f(x) = 3 - x \operatorname{sen} \left(\frac{1}{x} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 3 - \lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 3 - 0 = 3$$

En $x=0$ la discontinuidad es removible o evitable.

La nueva función $f(x)$ que resulta ser continua

$\forall x \in \mathbb{R}$ es:

$$f(x) = \begin{cases} 3 - x \operatorname{sen} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 3 & x = 0 \end{cases}$$

CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN EN UN INTERVALO CERRADO

Se dice que la función $f(x)$ es continua en un intervalo cerrado $[a,b]$, si se cumple:

1. $f(x)$ está definida en todo punto $x \in [a;b]$
2. $f(x)$ es continua en todo punto x del intervalo abierto $<a;b>$ es decir:

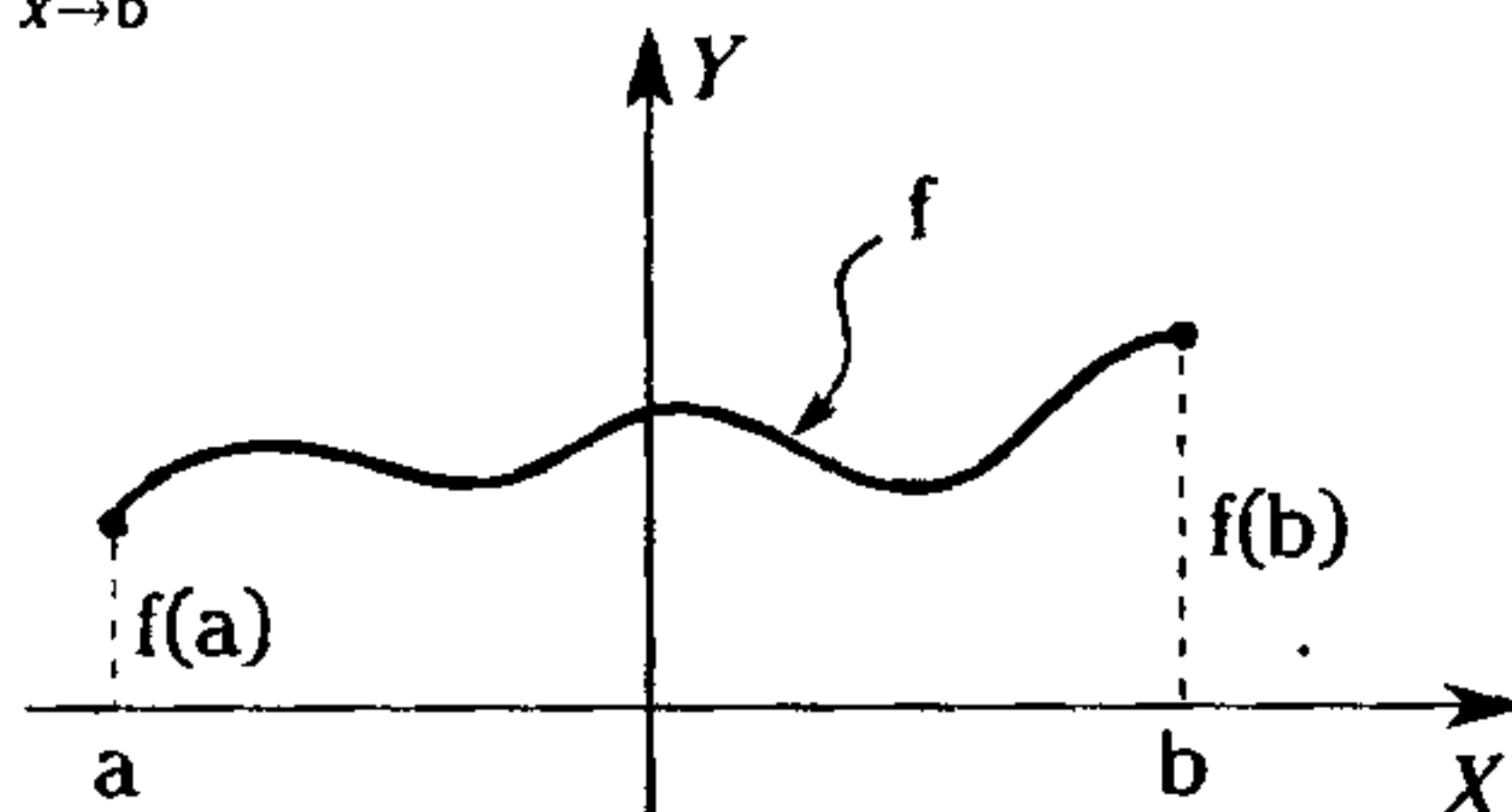
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \quad \forall x \in <a;b>$$

3. $f(x)$ es continua por la derecha en el extremo a , es decir:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

4. $f(x)$ es continua por la izquierda en el extremo b , es decir:

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$$



Ejemplo 1

Obtener la prolongación continua en el intervalo cerrado $[0;1]$ de:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{|x-1|} & 0 \leq x < 1 \\ 4 & x = 1 \end{cases}$$

Resolución:

- $f(x)$ es continua en $x \in <0;1>$
Si $x \in <0;1>$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \frac{x-1}{|x-1|} = \lim_{x \rightarrow x_0} (-1) \\ &= f(x_0) \quad \forall x_0 \in <0;1> \\ \Rightarrow f(x) &\text{ es continua en } x \in <0;1> \end{aligned}$$

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-1) = -1 = f(0)$
 $\Rightarrow f(x)$ es continua por derecha en el punto $x=0$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-1) = -1 \neq 4 = f(1)$$

$f(x)$ no es continua por izquierda en $x=1$
Sin embargo, se puede definir como:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{|x-1|} & \text{si } x \in [0;1) \\ -1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Ejemplo 2

Determinar la continuidad de la función

$$f(x) = \sqrt{\frac{4-x^2}{1-x^2}} \quad \text{en } x \in [-1,1]$$

Resolución:

El dominio de la función:

$$\frac{4-x^2}{1-x^2} \geq 0 \Rightarrow x \in <-\infty, -2] \cup <-1,1> \cup [2, +\infty >$$

$$\begin{aligned} \text{Si } x \in <-1,1> \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{\frac{4-x^2}{1-x^2}} \\ &= \sqrt{\frac{4-x_0^2}{1-x_0^2}} = f(x_0) \end{aligned}$$

Entonces, $f(x)$ es continua en $<-1,1>$

- $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \sqrt{\frac{4-x^2}{1-x^2}} = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{\frac{4-x^2}{1-x^2}} = +\infty$



1. $f(x)$ es continua en el intervalo $[a;b]$ si es continua $\forall x \in [a;b]$ y, además, es continua por la derecha en el punto a y por la izquierda en el punto b .
2. Del mismo modo se define la continuidad de la función en el intervalo semiabierto $<a;b]$ y/o también en $[a;b>$. También en los intervalos de la forma.
 $<a;+\infty>; <-\infty;b>; [a;+\infty>; <-\infty;b];$
 $\mathbb{R} = <-\infty;+\infty>$

Problemas Resueltos

Problema 1

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, demostrar que b es único.

Resolución:

Hay que demostrar que si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b_1$,

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b_2$ se tendrá $b_1 = b_2$.

Por hipótesis, dado $\varepsilon > 0$ se puede hallar un $\delta > 0$ tal que:

$$|f(x) - b_1| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ si } |x - a| < \delta$$

$$|f(x) - b_2| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ si } |x - a| < \delta$$

De

$$|b_1 - b_2| = |(b_1 - f(x)) - (b_2 - f(x))| \leq$$

$$|b_1 - f(x)| + |b_2 - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Es decir $|b_1 - b_2|$ es menor que cualquier número positivo ε (por pequeño que sea) con lo cual $b_1 = b_2$

Problema 2

Si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b \neq 0$, demostrar que existe $\delta > 0$ tal que:

$$|g(x)| > \frac{1}{2}|b| \text{ para } 0 < |x - a| < \delta$$

Resolución:

Como $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$ se puede encontrar $\delta > 0$ tal

$$\text{que } |g(x) - b| < \frac{1}{2}|b| \text{ para } |x - a| < \delta$$

$$\text{Escribiendo } b = (b - g(x)) + g(x)$$

$$|b| = |(b - g(x)) + g(x)| \leq |b - g(x)| + |g(x)|$$

$$< \frac{1}{2}|b| + |g(x)| \text{ de donde } |g(x)| > \frac{1}{2}|b|$$

Problema 3

Si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$, demostrar que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{b}$

$b \neq 0$

Resolución:

Hay que demostrar para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que:

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{b} \right| = \frac{|b - g(x)|}{|b||g(x)|} < \varepsilon ; |x - a| < \delta$$

Por hipótesis dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que:

$$|g(x) - b| < \frac{1}{2}b^2\varepsilon \text{ si } |x - a| < \delta_1$$

Del problema anterior como $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$ con

$b \neq 0$ se puede hallar $\delta_2 > 0$ tal que $|g(x)| > \frac{1}{2}|b|$ si $|x - a| < \delta_2$

Entonces, si δ es el menor de los δ_1 y δ_2 se puede escribir:

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{b} \right| = \frac{|g(x) - b|}{|b||g(x)|} < \frac{\frac{1}{2}b^2\varepsilon}{b \cdot \frac{1}{2}|b|} = \varepsilon$$

siempre que $|x - a| < \delta$

Con lo cual queda demostrado.

Problema 4

Calcular $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$

Resolución:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} \sqrt{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sin x}{x} \right) \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \\ = 1 \times 0 = 0$$

Problema 5

Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

Resolución:

Como

$$\sin x/2 = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} \Rightarrow 1 - \cos x = 2 \sin^2 x/2$$

se tiene:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2(x/2)}{x^2} &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x/2}{\left(\frac{x}{2}\right)^2 \cdot 4} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x/2}{x/2} \right)^2 = \frac{1}{2} \left(\lim_{x/2 \rightarrow 0} \frac{\sin x/2}{x/2} \right)^2 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Problema 6

Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x - \sin 2x}{x + \sin 3x} \right)$

Resolución:

Dividiendo numerador y denominador por x se obtiene:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{\sin 2x}{x}}{1 + \frac{\sin 3x}{x}} = \frac{1 - \lim_{x \rightarrow 0} 2 \frac{\sin 2x}{2x}}{1 + \lim_{x \rightarrow 0} 3 \frac{\sin 3x}{3x}}$$

$$\frac{1 - 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x}}{1 + 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x}} = \frac{1 - 2(1)}{1 + 3(1)} = -\frac{1}{4}$$

Recordando $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$

Problema 7

Calcular $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^2}{\sin \pi x}$

Resolución:

Haciendo $x = 1 + y \Rightarrow x \rightarrow 1, y \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - (1 + y)^2}{\sin \pi(y + 1)} &= - \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y(y + 2)}{\sin \pi y \cancel{\cos \pi} + \cos \pi y \cancel{\sin \pi}} \\ &= - \lim_{y \rightarrow 0} (y + 2) \cdot \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y\pi}{\sin \pi y} \cdot \frac{1}{\pi} \\ &= -2 \cdot \frac{1}{\pi} = -\frac{2}{\pi} \end{aligned}$$

Problema 8

Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x^2}$

Resolución:

El límite es de la forma indeterminada $\frac{0}{0}$

Multiplicando y dividiendo por $1 + \sqrt{\cos x}$ se obtiene:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x^2} \right) \left(\frac{1 + \sqrt{\cos x}}{1 + \sqrt{\cos x}} \right) \\ \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos x}{x^2} \right) \left(\frac{1}{1 + \sqrt{\cos x}} \right) \end{aligned}$$

Como $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ (del problema 5)

y $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sqrt{\cos x}) = 1 + 1 = 2$

Entonces, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

Problema 9

Calcular $\lim_{x \rightarrow 1} (1 - x) \tan \left(\frac{\pi x}{2} \right)$

Resolución:

Haciendo $x = y + 1$, si $x \rightarrow 1, y \rightarrow 0$

$$\lim_{y \rightarrow 0} (-y) \tan \frac{\pi}{2}(y + 1) = - \lim_{y \rightarrow 0} y \tan \frac{\pi}{2}(y + 1)$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} y \tan\left(\frac{\pi y}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= -\lim_{y \rightarrow 0} y \frac{\sin\left(\frac{\pi y}{2} + \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi y}{2} + \frac{\pi}{2}\right)}$$

$$= -\lim_{y \rightarrow 0} y \frac{\sin \frac{\pi y}{2} \cancel{\cos \frac{\pi}{2}} + \cos \frac{\pi y}{2} \cancel{\sin \frac{\pi}{2}}}{\cos \frac{\pi y}{2} \cancel{\cos \frac{\pi}{2}} - \sin \frac{\pi y}{2} \cancel{\sin \frac{\pi}{2}}}$$

$$= -\lim_{y \rightarrow 0} y \frac{\cos \frac{\pi y}{2}}{-\sin \frac{\pi y}{2}} = \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\pi y}{2}}{\frac{\pi y}{2} \cdot \frac{2}{\pi}}}$$

$$= \frac{2}{\pi}$$

Problema 10

Calcular $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}}$

Resolución:

Haciendo un cambio de variable

$$x = y + \frac{\pi}{4}, \text{ si } x \rightarrow \frac{\pi}{4}, y \rightarrow 0$$

Se tiene:

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\tan\left(y + \frac{\pi}{4}\right) - 1}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{\tan y - \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan y \tan \frac{\pi}{4}} - 1}{y}$$

Nota $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}; \tan \frac{\pi}{4} = 1$

$$\begin{aligned} &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{\tan y + 1}{1 - \tan y} - 1}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2 \tan y}{y(1 - \tan y)} \\ &= 2 \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\tan y}{y} \cdot \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{1 - \tan y} = 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{1 - 0} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Problema 11

Usando la definición de límite demostrar que:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 8x + 4}{x - 2} = 4$$

Resolución:

Debemos demostrar que: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$

Si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que si $0 < |x - a| < \delta$ entonces, $|f(x) - b| < \varepsilon$

En el problema, si $|x - 2| < \delta$

$$\text{Entonces } \left| \frac{3x^2 - 8x + 4}{x - 2} - 4 \right| < \varepsilon$$

Dado $\varepsilon > 0$, debemos encontrar $\delta > 0$

$$\left| \frac{3x^2 - 8x + 4}{x - 2} - 4 \right| = \left| \frac{(3x - 2)(\cancel{x - 2})}{\cancel{x - 2}} - 4 \right|$$

$$= |3x - 2 - 4| = 3|x - 2| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow 0 < |x - 2| < \frac{\varepsilon}{3} = \delta \Rightarrow \delta = \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\text{Si } 0 < |x - 2| < \frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow |f(x) - 4| < \varepsilon$$

$$\text{Luego, } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$$

Problema 12

Demostrar usando la definición que:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^3 - 1}{x - 1} \right) = 3$$

Resolución:

Debemos demostrar que $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tal que

$$|x-1| < \delta \Rightarrow \left| \frac{x^3-1}{x-1} - 3 \right| < \varepsilon$$

Dado $\varepsilon > 0$, debemos encontrar $\delta > 0$

$$\left| \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)} - 3 \right| = |(x-1)(x+2)|$$

$$= |x-1| |x+2|$$

Necesitamos acotar $|x+2|$

$$\text{Tomando } \delta = 1 \Rightarrow 0 < |x-1| < 1$$

$$\Rightarrow -1 < x-1 < 1 \Rightarrow 2 < x+2 < 4$$

$$\Rightarrow |x+2| < 4$$

$$\text{Si } |x-1| < 1 \Rightarrow |f(x)-3| = |x+2| |x-1|$$

$$< 4|x-1| < \varepsilon \Rightarrow |x-1| < \frac{\varepsilon}{4} = \delta$$

$$\Rightarrow \delta = \min \left\{ 1; \frac{\varepsilon}{4} \right\}$$

$$\text{Luego, } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$$

Problema 13

Demostrar que:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x} = 2$$

Resolución:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / 0 < |x-4| < \delta \Rightarrow |\sqrt{x}-2| < \varepsilon?$$

Sea $\varepsilon > 0$

$$|\sqrt{x}-2| = \left| \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}+2} \right| = \frac{|x-4|}{\sqrt{x}+2}$$

$$\text{Pero: } \sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x}+2 \geq 2 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}+2} \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{entonces: } \frac{|x-4|}{\sqrt{x}+2} \leq \frac{1}{2} |x-4| < \varepsilon$$

$$|x-4| < 2\varepsilon = \delta \Rightarrow \delta = 2\varepsilon$$

$$\text{Luego, } \lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x} = 2$$

Problema 14

Demostrar que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+4}{x^2+x+1} = 4$$

Resolución:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / 0 < |x-0| < \delta \Rightarrow \left| \frac{x+4}{x^2+x+1} - 4 \right| < \varepsilon?$$

Dado $\varepsilon > 0$, debemos encontrar $\delta > 0$

$$\left| \frac{x+4}{x^2+x+1} - 4 \right| = \left| \frac{4x^2+3x}{x^2+x+1} \right| = \frac{|x| |4x+3|}{|x^2+x+1|}$$

Nota

$$x^2+x+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2+x+1} \leq \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{x+4}{x^2+x+1} - 4 \right| \leq \frac{4}{3} |4x+3| |x|$$

Tomando $\delta = 10$

$$|x| < 10 \Rightarrow -10 < x < 10 \Rightarrow -37 < 4x+3 < 43$$

$$\Rightarrow |4x+3| < 43$$

$$\frac{4}{3} |4x+3| |x| < \frac{4}{3} \cdot 43 |x| = \frac{172}{3} |x| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow |x| < \frac{3\varepsilon}{172} = \delta$$

$$\Rightarrow \delta = \min \left\{ \frac{3\varepsilon}{172}; 10 \right\}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+4}{x^2+x+1} = 4$$

Problema 15

Hallar $\delta > 0$ tal que:

$$\left| \frac{2x^2-3x+1}{x^2+1} \right| < 0,2 \text{ si } 0 < |x-1| < \delta$$

Resolución:

$$\left| \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 + 1} \right| = \frac{|2x - 1| |x - 1|}{|x^2 + 1|} \leq |2x - 1| |x - 1|$$

como $x^2 + 1 \geq 1$

$$|2x - 1| |x - 1| \leq 0,2$$

$$\text{Tomando } \delta = \frac{1}{2} \Rightarrow |x - 1| < \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} < x - 1 < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2} \Rightarrow 1 < 2x < 3$$

$$\Rightarrow 0 < 2x - 1 < 2 \Rightarrow |2x - 1| < 2$$

$$\text{Luego, } |x - 1| |2x + 1| < 2 |x - 1| < 0,2$$

$$\Rightarrow |x - 1| < \frac{0,2}{2} = 0,1 = \delta$$

$$\text{Luego, } \delta = \min\{0,2; 0,1\} = 0,1$$

Problema 16

Calcular

$$a = \lim_{x \rightarrow 6} \frac{\sqrt{2x-4} - \sqrt{8}}{\sqrt{x-3} - \sqrt{3}} \quad ; \quad b = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - 3}{\sqrt{x-2} - \sqrt{2}}$$

e indique $a \times b$.

Resolución:

Los límites son de la forma $\frac{0}{0}$

$$a = \lim_{x \rightarrow 6} \frac{\sqrt{2x-4} - \sqrt{8}}{\sqrt{x-3} - \sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{2x-4} + \sqrt{8}}{\sqrt{2x-4} + \sqrt{8}} \cdot \frac{\sqrt{x-3} + \sqrt{3}}{\sqrt{x-3} + \sqrt{3}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 6} \frac{(2x-4-8)(\sqrt{x-3} + \sqrt{3})}{(x-3-3)(\sqrt{2x-4} + \sqrt{8})} = \frac{2 \cdot 2\sqrt{3}}{2\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$b = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - 3}{\sqrt{x-2} - \sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2x+1} + 3}{\sqrt{2x+1} + 3} \cdot \frac{\sqrt{x-2} + \sqrt{2}}{\sqrt{x-2} + \sqrt{2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(2x+1-9)(\sqrt{x-2} + \sqrt{2})}{(x-2-2)\sqrt{2x+1} + 3} = \frac{2 \cdot 2\sqrt{2}}{2 \cdot 3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{Luego, } ab = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\therefore ab = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Problema 17

Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt{x} - 3}{x - 1}$$

Resolución:

Haciendo $x = t^{12}$ $x \rightarrow 1, t \rightarrow 1$

Se tiene:

$$\lim_{t \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{t^{12}} + \sqrt[3]{t^{12}} + \sqrt{t^{12}} - 3}{t^{12} - 1}$$

Reduciendo y ordenando:

$$\lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^6 + t^4 + t^3 - 3}{t^{12} - 1} \quad \text{se busca eliminar el factor}$$

$(t-1)$ quien lleva a la forma indeterminada $\frac{0}{0}$

Factorizando numerador y denominador.

$$(*) \quad t^6 + t^4 + t^3 - 3 \equiv (t^6 - 1) + (t^4 - 1) + (t^3 - 1)$$

$$\equiv (t-1)(t^5 + t^4 + t^3 + t^2 + t + 1) +$$

$$(t-1)(t^3 + t^2 + t + 1) + (t-1)(t^2 + t + 1)$$

$$\equiv (t-1)[t^5 + t^4 + 2t^3 + 3t^2 + 3t + 3]$$

$$(*) \quad t^{12} - 1 = (t-1)(t^{11} + t^{10} + \dots + t^2 + t + 1)$$

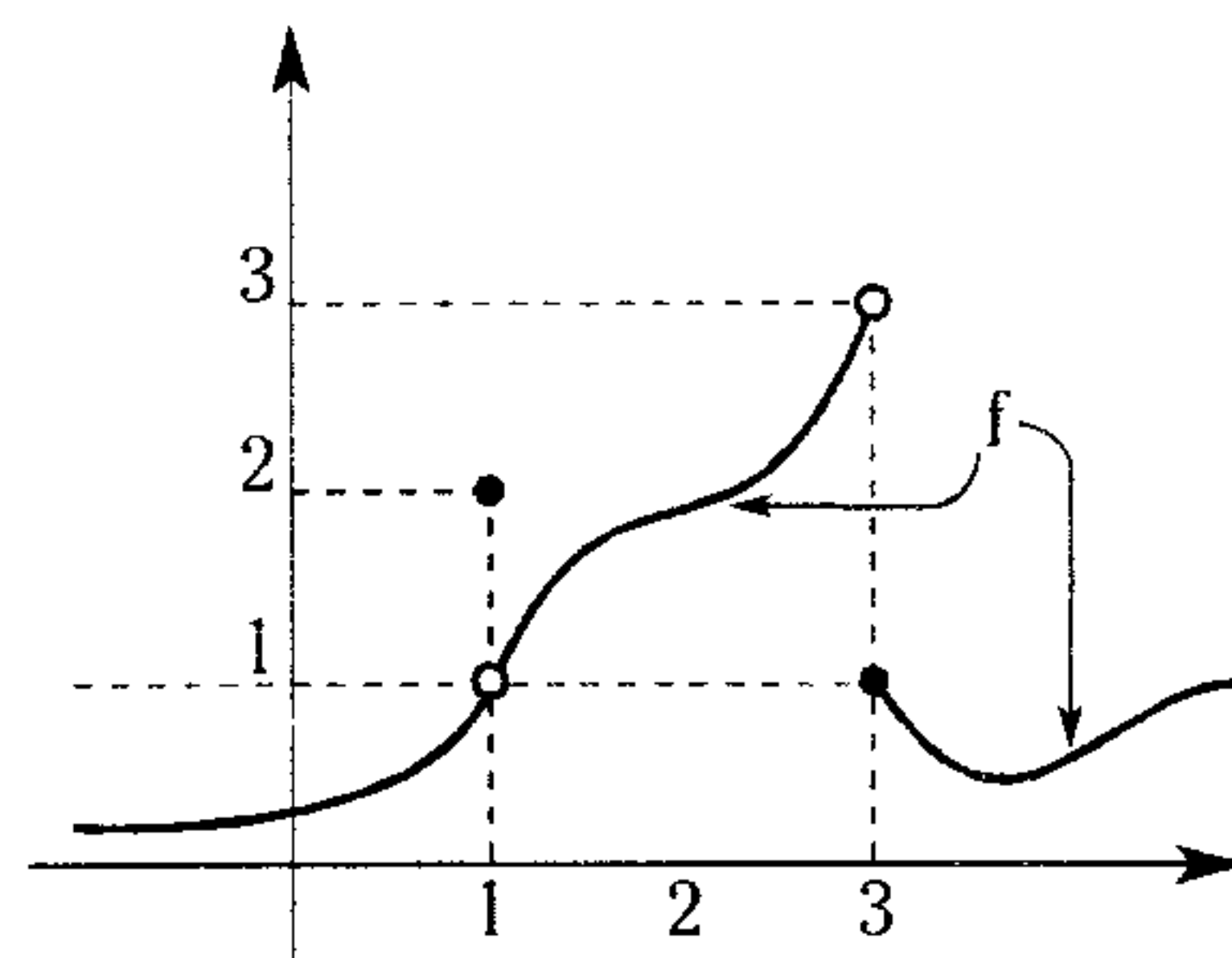
Entonces,

$$\lim_{t \rightarrow 1} \frac{(t-1)(t^5 + t^4 + 2t^3 + 3t^2 + 3t + 3)}{(t-1)(t^{11} + t^{10} + \dots + t^2 + t + 1)}$$

$$= \frac{1+1+2+3+3+3}{\underbrace{1+1+\dots+1}_{12 \text{ unos}}} = \frac{13}{12}$$

Problema 18

Si la gráfica de la función f es:



Dar el valor de verdad de las siguientes proposiciones.

I. $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) + f(1) = 2$

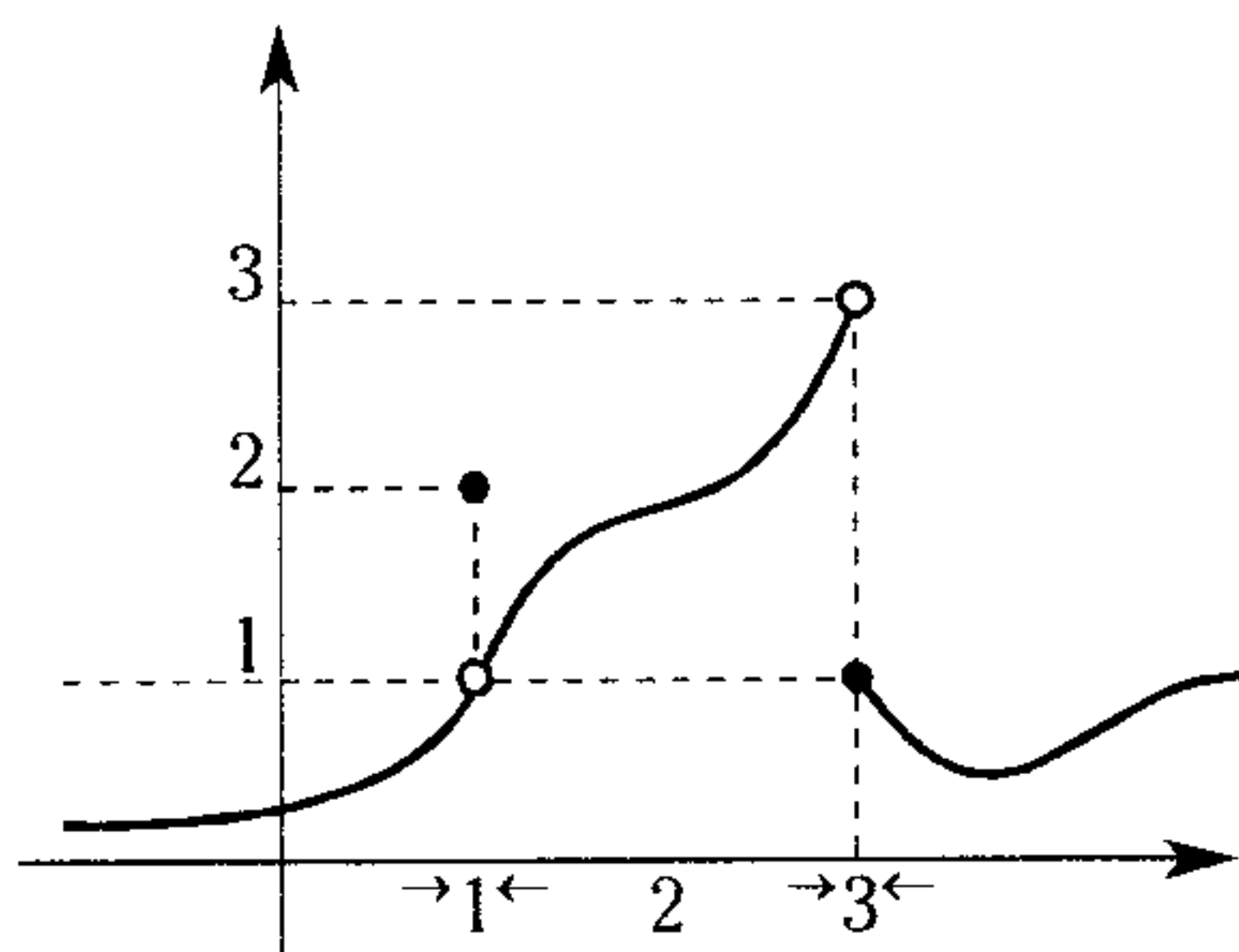
II. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(3)$

III. $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3)$

IV. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$

Resolución:

Del gráfico:



$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1 \wedge f(1) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 3, \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 1 \wedge f(3) = 1$$

Luego, las proposiciones son:

- I. F
- II. V
- III. F
- IV. F

Problema 19

$$\text{Sea } f(x) = \begin{cases} bx^2 + ab & ; x \geq 0 \\ 2(x^2 + b)^{1/2} - b & ; x < 0 \end{cases}$$

Hallar a y b para que exista $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

$$\text{Además, } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \wedge f(1) = 1$$

Dar como respuesta $4b - a$

Resolución:

Recordemos $\lim_{x \rightarrow m} f(x)$ existe si y sólo si

$$\lim_{x \rightarrow m^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow m^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow m} f(x)$$

Con el problema:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = b \cdot 0 + ab = ab$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 2 \cdot (0^2 + b)^{1/2} - b = 2\sqrt{b} - b$$

$$\text{Entonces: } ab = 2\sqrt{b} - b \dots (\alpha)$$

$$\text{Además, } f(1) = 1 \Rightarrow b + ab = 1 \dots (\beta)$$

$$\text{De } (\alpha) \text{ y } (\beta): ab + b = 2\sqrt{b} = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{4}$$

$$\text{En } (\beta): \frac{1}{4} + \frac{a}{4} = 1 \Rightarrow \frac{a}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow a = 3$$

$$\text{Se pide } 4b - a = 4\left(\frac{1}{4}\right) - 3 = -2$$

Problema 20

Dadas las funciones:

$$f(x) = \sqrt{x+1}; \quad x \in [-1, 2>$$

$$g(x) = \begin{cases} \llbracket x \rrbracket & ; x < 0 \\ x^2 - 1 & ; x \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{Halle } \lim_{x \rightarrow 0} (f \circ g)(x)$$

Resolución:

Redefiniendo la función g.

$$g(x) = \begin{cases} -1 & ; x < 0 \\ x^2 - 1 & ; x \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{Recordando: } \llbracket x \rrbracket = -1 \Leftrightarrow -1 \leq x < 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} (-1) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 - 1) = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} (f \circ g)(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(g(x))$$

$$\Rightarrow f\left(\lim_{x \rightarrow 0} g(x)\right) = f(-1) = \sqrt{-1+1} = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} (f \circ g)(x) = 0$$

Problema 21

$$\text{Si } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x)-1}{x} \right) = 1$$

$$\text{Calcular } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}$$

Resolución:

NOTA

$$\frac{f(ax)-f(bx)}{x} = \frac{f(ax)-1}{x} - \frac{f(bx)-1}{x}$$

$$= a \left[\frac{f(ax)-1}{ax} \right] - b \left[\frac{f(bx)-1}{bx} \right]$$

Tomando límite cuando $x \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ a \left[\frac{f(ax)-1}{ax} \right] - b \left[\frac{f(bx)-1}{bx} \right] \right\}$$

Como $x \rightarrow 0$, $ax \rightarrow 0 \wedge bx \rightarrow 0$

$$= a \lim_{ax \rightarrow 0} \left(\frac{f(ax)-1}{ax} \right) - b \lim_{bx \rightarrow 0} \left(\frac{f(bx)-1}{bx} \right) = a - b$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(ax)-f(bx)}{x} = a - b$$

Problema 22

Sabiendo que el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow 2b} \frac{x(x^2-x+a)-144}{x^2-4bx+4b^2} \text{ es un número real}$$

determinado, según ello calcular: $a+4b$.**Resolución:**Como el denominador es $(x-2b)^2$ para que el límite de la función sea un número real,determinado $(x-2b)^2$ debe ser un factor de numerador.

Por Horner: $\frac{x^3 - x^2 + ax - 144}{x^2 - 4bx + 4b^2}$

1	1	-1	a	-144
4b	↓	4b	-4b ²	
-4b ²		↓	4b(4b-1)	-4b ² (4b-1)
	1	4b-1	0	0

Del resto

$$-144 - 4b^2(4b-1) = 0 \Rightarrow b^2(4b-1) = -36$$

De donde $b = -2$

$$\text{Asimismo: } a - 4b^2 + 4b(4b-1) = 0$$

$$\Rightarrow a = 4(-2)^2 - 4(-2)[4(-2)-1] \Rightarrow a = -56$$

$$\therefore a + 4b = -56 + 4(-2) = -64$$

Problema 23

Determine

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+\beta x} - \sqrt[m]{1+\alpha x}}{x}, \quad m, n \in \mathbb{N}$$

Resolución:

Del binomio de Newton:

$$(1+ax)^r \approx 1+ax \cdot r \quad \text{si } ax \rightarrow 0$$

En el problema:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+\beta x)^{1/n} (1+\alpha x)^{1/m} - 1}{x}$$

Como $x \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(1 + \frac{\beta x}{n}\right) \left(1 + \frac{\alpha x}{m}\right) - 1}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{\alpha x}{m} + \frac{\beta x}{n} + \frac{\alpha \beta x^2}{mn} - 1}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\alpha}{m} + \frac{\beta}{n} + \frac{\alpha \beta}{mn} x \right) = \frac{\alpha}{m} + \frac{\beta}{n}$$

$$\therefore \text{el límite buscado es } \frac{\alpha}{m} + \frac{\beta}{n}$$

Problema 24

$$\text{Si } a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + 4(10)^x}{3 + 5(10)^x}$$

$$c = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{6x^2 + x} - \sqrt{6}x$$

Calcule a.c

Resolución:

Recordando:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < r < 1 \\ \infty & \text{si } r > 1 \end{cases}$$

En el problema:

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + 4(10^x)}{3 + 5(10^x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{10^x} + 4}{\frac{3}{10^x} + 5}$$

$$= \frac{2 \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{10}\right)^x + 4}{3 \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{10}\right)^x + 5} = \frac{4}{5} \Rightarrow a = \frac{4}{5}$$

$$c = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{6x^2 + x} - \sqrt{6}x$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{6x^2 + x} - \sqrt{6}x) \cdot \frac{\sqrt{6x^2 + x} + \sqrt{6}x}{\sqrt{6x^2 + x} + \sqrt{6}x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\cancel{6x^2} + x - \cancel{6x^2}}{\sqrt{6x^2 + x} + \sqrt{6}x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{6x^2 + x} + \sqrt{6}x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{6 + \frac{1}{x}} + \sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6} + \sqrt{6}} = \frac{1}{2\sqrt{6}}$$

$$\Rightarrow c = \frac{1}{2\sqrt{6}}$$

$$\therefore a \cdot c = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2\sqrt{6}} = \frac{2}{5\sqrt{6}}$$

Problema 25

Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^n - 1 + 2n(x-1)}{x^2 - 1}, & x < 1 \\ \frac{2x^2 - \sqrt{x+3}}{x - \sqrt{x}}, & x > 1 \end{cases}$$

Calcular el valor de n ($n \in \mathbb{N}$) de modo que

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ exista.

Resolución:

Recordando: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existe si y sólo si

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

$$\begin{aligned} \text{I. } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^n - 1 + 2n(x-1)}{x^2 - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\cancel{x-1})(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1) + 2n(\cancel{x-1})}{(\cancel{x-1})(x+1)} \\ &= \frac{\overbrace{(1+1+\dots+1)}^{n \text{ sumandos}} + 2n}{1+1} = \frac{n+2n}{2} = \frac{3n}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{II. } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^2 - \sqrt{x+3}}{x - \sqrt{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - \sqrt{x+3}}{x - \sqrt{x}} \cdot \frac{2x^2 + \sqrt{x+3}}{2x^2 + \sqrt{x+3}} \cdot \frac{x + \sqrt{x}}{x + \sqrt{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{[4x^4 - (x+3)][x + \sqrt{x}]}{(x^2 - x)(2x^2 + \sqrt{x+3})} \end{aligned}$$

Observe que:

$$4x^4 - x - 3 \equiv (x-1)(4x^3 + 4x^2 + 4x + 3)$$

$$x^2 - x \equiv x(x-1)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\cancel{x-1})(4x^3 + 4x^2 + 4x + 3)(x + \sqrt{x})}{(\cancel{x-1})x(2x^2 + \sqrt{x+3})}$$

$$\text{Evaluando } \frac{(4+4+4+3)(1+1)}{2+\sqrt{1+3}} = \frac{15}{2}$$

$$\text{De (I) y (II): } \frac{3n}{2} = \frac{15}{2} \Rightarrow n = 5$$

Problema 26

Usando la definición de límite demostrar que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{2x+1} = \frac{1}{2}$$

Resolución:

La igualdad $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{2x+1} = \frac{1}{2}$ significa que

$\forall \varepsilon > 0; \exists \delta > 0$ tal que de la desigualdad $x > \delta$

$$\Rightarrow \left| \frac{x+1}{2x+1} - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{|2x+1|} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\varepsilon} < |2x+1| \text{ como sabemos}$$

$|2x|-1 > |2x+1|$ esto bastará para

$$|2x|-1 > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow |x| > \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\varepsilon} \right)$$

Tomando

$$\delta = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\varepsilon} \right) \Rightarrow |x| > \delta \Rightarrow \left| \frac{x+1}{2x+1} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$$

$$\text{esto es } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{2x+1} = \frac{1}{2}$$

Problema 27

$$\text{Demuestre } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$$

Resolución:

Sea $x > 1$ pongamos $n = \lfloor x \rfloor \Rightarrow x = n + k$ donde

$$n \in \mathbb{N} / k \in [0, 1) \Rightarrow n \leq x < n+1$$

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{x} \leq \frac{1}{n} \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{n+1} \right)^n < \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x < \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1}$$

para $x \rightarrow +\infty$ ($n \rightarrow \infty$)

$$\text{Como } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1} \right)^n = e$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$$

Ahora si $x < -1 \Rightarrow x = -y \quad y > 0$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{y} \right)^{-y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{y-1} \right)^{y-1}$$

$$= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{y-1} \right)^{y-1} \left(1 + \frac{1}{y-1} \right) = e$$

Para $x \rightarrow -\infty$ de los 2 casos se tiene:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$$

Problema 28

$$\text{Halle } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x - \cos 2x - 1}{\sin x - \cos x}$$

Resolución:

Evaluando tenemos $\frac{0}{0}$, vamos a transformar.

$$\frac{\sin 2x - \cos 2x - 1}{\sin x - \cos x} = \frac{\sin 2x - (1 + \cos 2x)}{-\cos x + \sin x}$$

$$= \frac{2\sin x \cos x - 2\cos^2 x}{\sin x - \cos x} = 2\cos x$$

$\forall x \neq \frac{\pi}{4}$ pero como $2\cos x$ es continua en $x = \frac{\pi}{4}$

tomando límite.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x - \cos 2x - 1}{\sin x - \cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} 2\cos x = \sqrt{2}$$

Problema 29

$$\text{Halle } \lim_{\theta \rightarrow 1} (1 - \theta) \tan \frac{\pi\theta}{2}$$

Resolución:

Evaluando tenemos 0. α para hallar el límite hacemos $1-\theta = x$; como

$$\lim_{\theta \rightarrow 1} x = \lim_{\theta \rightarrow 1} (1-\theta) = 0$$

Cuando $\theta \rightarrow 1$ ($x \rightarrow 0$); $\theta = 1-x$

$$\lim_{\theta \rightarrow 1} (1-\theta) \tan \frac{\pi\theta}{2} = \lim_{x \rightarrow 0} x \tan \frac{\pi}{2}(1-x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin \frac{\pi}{2}x}$$

$$\cos \frac{\pi}{2}x = \frac{2}{\pi} \lim_{x \rightarrow 0} x \frac{\frac{\pi}{2}x}{\sin \frac{\pi}{2}x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{\pi}{2}x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \frac{\frac{\pi}{2}x}{\sin \frac{\pi}{2}x} = 1 \quad \wedge \quad \lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{\pi}{2}x = 1$$

$$\therefore \lim_{\theta \rightarrow 1} (1-\theta) \tan \frac{\pi\theta}{2} = \frac{2}{\pi}$$

Problema 30

Calcule $\lim_{m \rightarrow +\infty} G$ donde $G = \frac{m^x}{x C_m^{m+x}}$

Resolución:

$$\begin{aligned} G &= \frac{m^x}{x \frac{(m+x)!}{m! x!}} = \frac{m^x m! x!}{(m+x)! x} = \\ &= \frac{(x-1)! m^x m!}{1.2.3...m(m+1)...(m+x)} = \\ &= \frac{(x-1)! 1.2.3...mm^x}{1.2.3...m(m+1)...(m+x)} \text{ entre } m^x \\ &= \frac{(x-1)!}{\left(1+\frac{1}{m}\right)\left(1+\frac{2}{m}\right)...\left(1+\frac{x}{m}\right)} \text{ cuando } (m \rightarrow \infty) \\ \lim_{m \rightarrow \infty} G &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{(x-1)!}{\left(1+\frac{1}{m}\right)\left(1+\frac{2}{m}\right)...\left(1+\frac{x}{m}\right)} = (x-1)! \end{aligned}$$

Problema 31

Halle $a+b+\frac{3}{4}$ para que $f(1)=1$ si:

$$f(x) = \begin{cases} bx^2 \left\lfloor x^2 + \left\lfloor \frac{1}{\lfloor x^2 \rfloor + 100} \right\rfloor \right\rfloor + ab \operatorname{sgn}(10-x^2); x \geq 0 \\ 2\sqrt{x^2+b} + b \operatorname{sgn} x; x < 0 \end{cases}$$

Además existe $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

Resolución:

$$1 = f(1) = b(1)^2 \left\lfloor 1+0 \right\rfloor + ab(1) = b + ab \quad \dots (\alpha)$$

$$\text{como: } \left\lfloor \frac{1}{\lfloor x^2 \rfloor + 100} \right\rfloor = 0$$

$$1. \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = b(0) + ab \underbrace{\operatorname{sgn}(10-0)}_{\text{UNO}} = ab \quad \dots (\beta)$$

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 2\sqrt{0+b} + b(-1) = 2\sqrt{b} - b \quad \dots (\theta)$$

como $f(x)$ tiene límite en $x=0$

$$ab = 2\sqrt{b} - b \text{ en } (\alpha) \Rightarrow 2\sqrt{b} = 1 \quad \therefore b = \frac{1}{4}$$

$$\therefore a = 3; L = \frac{3}{4} = ab$$

$$3 + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 4$$

Problema 32

Halle el valor de $n \in \mathbb{Z}$ si se sabe que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+8)^n (3x+4+6)^{n+1} (4x+16)^{n-2}}{(9x^2+6x-3)^n (2x-6)^{n-1}} = \frac{8}{243}$$

Resolución:

Cuando $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = k / k \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow P(x)$ y $Q(x)$ son del mismo grado y K es la división de coeficientes principales en el problema.

$$\frac{x^n \cdot 3^{n+1} x^{n+1} (4x)^{n-2}}{9^n x^{2n} (2x)^{n-1}} = \frac{2^{2n-4} \cdot 3^{n+1}}{3^{2n} \cdot 2^{n-1}} = \frac{2^{n-3}}{3^{n-1}} = \frac{8}{243}$$

$$\therefore n = 6$$

Problema 33

Demuestre que una raíz de;

$ax^2 + bx + c = 0$ con b, c reales mientras a tiende a cero ($b \neq 0$) es real.

Resolución:

Las raíces x_1, x_2

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}; \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Racionalizando

$$x_1 = \frac{-4\cancel{a}c}{2\cancel{a}(\sqrt{b^2 - 4ac} + b)} \Rightarrow \lim_{a \rightarrow 0} x_1 = -\frac{c}{b}$$

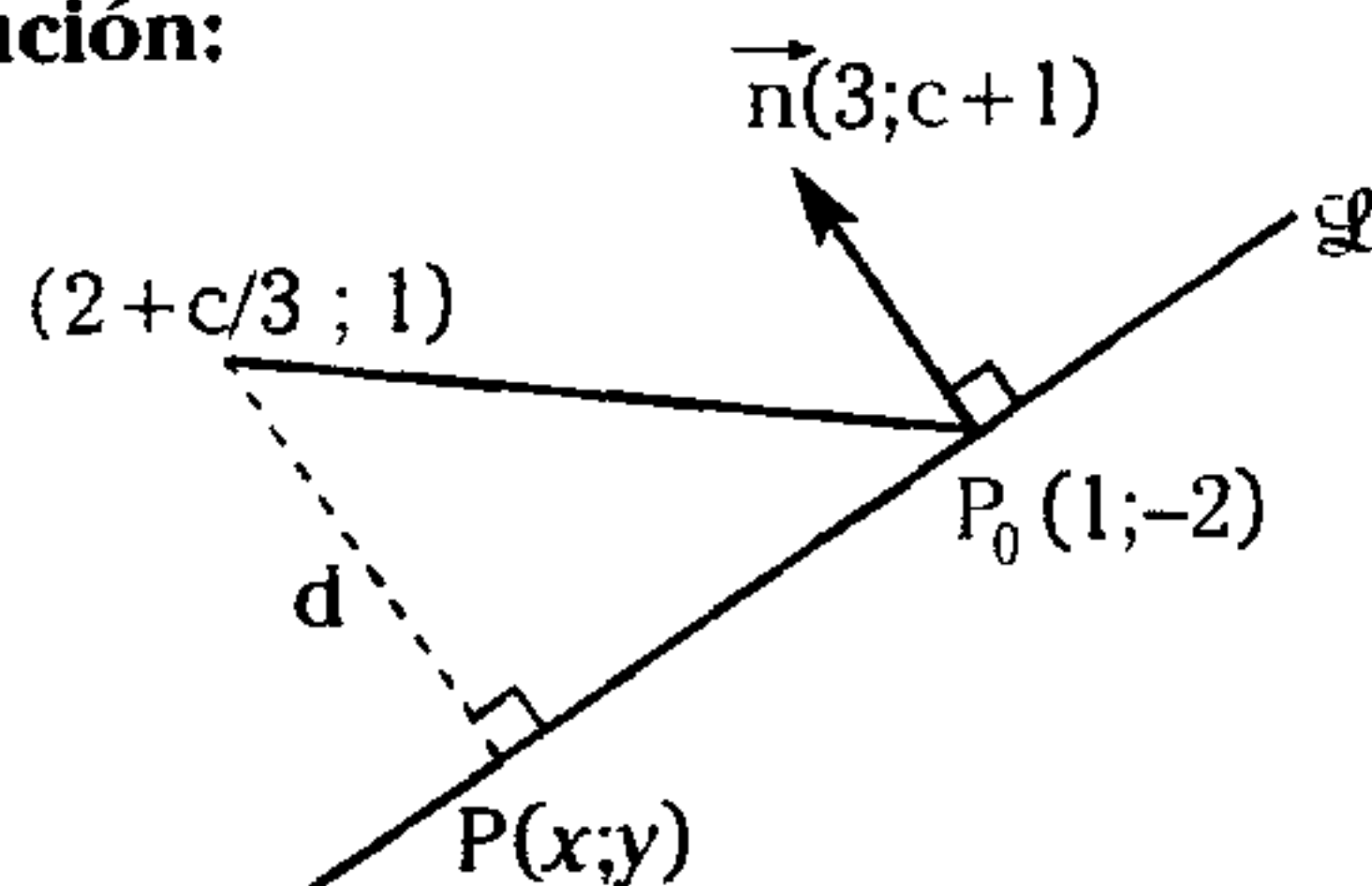
$$x_2 = \frac{-4\cancel{a}c}{2\cancel{a}(b - \sqrt{b^2 - 4ac})} \Rightarrow \lim_{a \rightarrow 0} x_2 = -\frac{2c}{0} = \infty$$

pero notamos que $x_1 = -\frac{c}{b}$ es una real.

Problema 34

Halle la distancia del punto $\left(2 + \frac{c}{3}; 1\right)$ a la recta que pasa por $(1; -2)$ es ortogonal a $(3; c+1)$ cuando " C " tiende a " 3 ".

Resolución:



La ecuación de la recta L : $(P - P_0) \cdot \vec{n} = 0$ cuando c tiende a " 3 " $\left(2 + \frac{c}{3}; 1\right) \rightarrow (3; 1)$

Reemplazando la recta $\mathcal{L} : ((x; y) - (1; -2)) \cdot (3; 4) = 0$

$$\Rightarrow 3(x - 1) + 4(y + 2) = 0 \Rightarrow 3x + 4y + 5 = 0$$

$$d = \frac{|3(3) + 4(1) + 5|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{18}{5}$$

Problema 35

Si $f(x) = ax + b$;

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4; \quad \lim_{x \rightarrow 2} f^{-1}(x) = -1. \text{ Halle } \frac{b}{a}$$

Resolución:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = a(2) + b = 4 \dots \textcircled{\alpha}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f^{-1}(x) = \frac{2 - b}{a} = -1 \dots \textcircled{\beta}$$

$$\text{de } \alpha \wedge \beta \quad a = \frac{2}{3}; \quad b = \frac{8}{3}$$

$$\frac{b}{a} = 4$$

Problema 36

$$\text{Calcule } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - \sqrt{x} - 2}{x - 4}$$

Resolución:

Podemos expresar convenientemente

$$L = \frac{\lim_{x \rightarrow 4} (x - 4) - (\sqrt{x} - 2)}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x} + 2}\right)$$

$$\text{tomando límite } L = 1 - \frac{1}{2 + 2} \Rightarrow L = \frac{3}{4}$$

Problema 37

$$\text{Calcule } \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt[n]{f(x)} - b}{x - a} \quad \text{y } f(a) = b^n; \quad b > 0$$

Resolución:

Se sabe

$$(\sqrt[n]{f(x)} - b) \underbrace{\left[\sqrt[n]{f(x)}^{n-1} + \sqrt[n]{f(x)}^{n-2} b + \dots + b^{n-1} \right]}_{FR(x)} = \sqrt[n]{f(x)}^n - b^n$$

$$L = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(\sqrt[n]{f(x)} - b)FR(x)}{(x-a)FR(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(\sqrt[n]{f(x)} - b)}{(x-a)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)\gamma(x)}{(x-a)FR(x)} = \frac{\gamma(a)}{FR(a)} \dots \textcircled{I}$$

también $FR(x) = \underbrace{\sqrt[n]{f(x)}^{n-1} + \sqrt[n]{f(x)}^{n-2}b + \dots + b^{n-1}}_{n \text{ términos}}$

Luego, evaluando $FR(a) = nb^{n-1} \dots \textcircled{II}$

Finalmente, $L = \frac{\gamma(a)}{nb^{n-1}}$



De I y II

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt[n]{f(x)} - b}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt[n]{f(x)}^n - b^n}{FR(x)(x-a)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)\gamma(a)}{(x-a)FR(x)} = \frac{\gamma(a)}{FR(a)} = \frac{\gamma(a)}{nb^{n-1}}$$

$$FR(a) = nb^{n-1}$$

$$FR(a) = \text{índice (\# que acompaña al radical)}^{\text{índice}-1}$$

Problema 38

Calcule el límite

$$\lim_{x \rightarrow a^n} \frac{\sqrt[n]{x} - a}{x - a^n}$$

Resolución:

Aplicando la nota anterior

$$L = \lim_{x \rightarrow a^n} \frac{\sqrt[n]{x} - a}{(x - a^n)FR(x)} = \lim_{x \rightarrow a^n} \frac{\cancel{x - a^n}}{(\cancel{x - a^n})FR(x)}$$

$$L = \frac{1}{FR(a)} = \frac{1}{na^{n-1}}$$

vemos $FR_{(a^n)} = na^{n-1}$

Problema 39

Calcule $L = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[5]{x^2 - 3} - 1}{\sqrt[3]{x + 6} - 2}$

Resolución :

$$L = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{(\sqrt[5]{x^2 - 3} - 1)^5}{FR_1(x)}}{\frac{(\sqrt[3]{x + 6} - 2)^3}{FR_2(x)}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - 4)FR_2(x)}{(x - 2)FR_1(x)}$$

$$L = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)FR_{2(x)}}{(x - 2)FR_{1(x)}} \Rightarrow L = \frac{4FR_2}{FR_1}$$

$$FR_2 = 3(2)^{3-1} = 12$$

$$FR_1 = 5(1)^{5-1} = 5$$

Finalmente $L = \frac{4(12)}{5} = \frac{48}{5}$

Problema 40

Calcule el límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x + 27} + \sqrt[4]{x + 16} - 5}{x - x^2}$$

Resolución:

Agrupando convenientemente

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[3]{x + 27} - 3) + (\sqrt[4]{x + 16} - 2)}{x(1 - x)}$$

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sqrt[3]{x + 27} - 3}{FR_1(x)} + \frac{\sqrt[4]{x + 16} - 2}{FR_2(x)}}{x(1 - x)}$$

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{x} \frac{1}{FR_1(x)} + \cancel{x} \frac{1}{FR_2(x)}}{\cancel{x}(1 - x)} = \frac{1}{FR_1} + \frac{1}{FR_2}$$

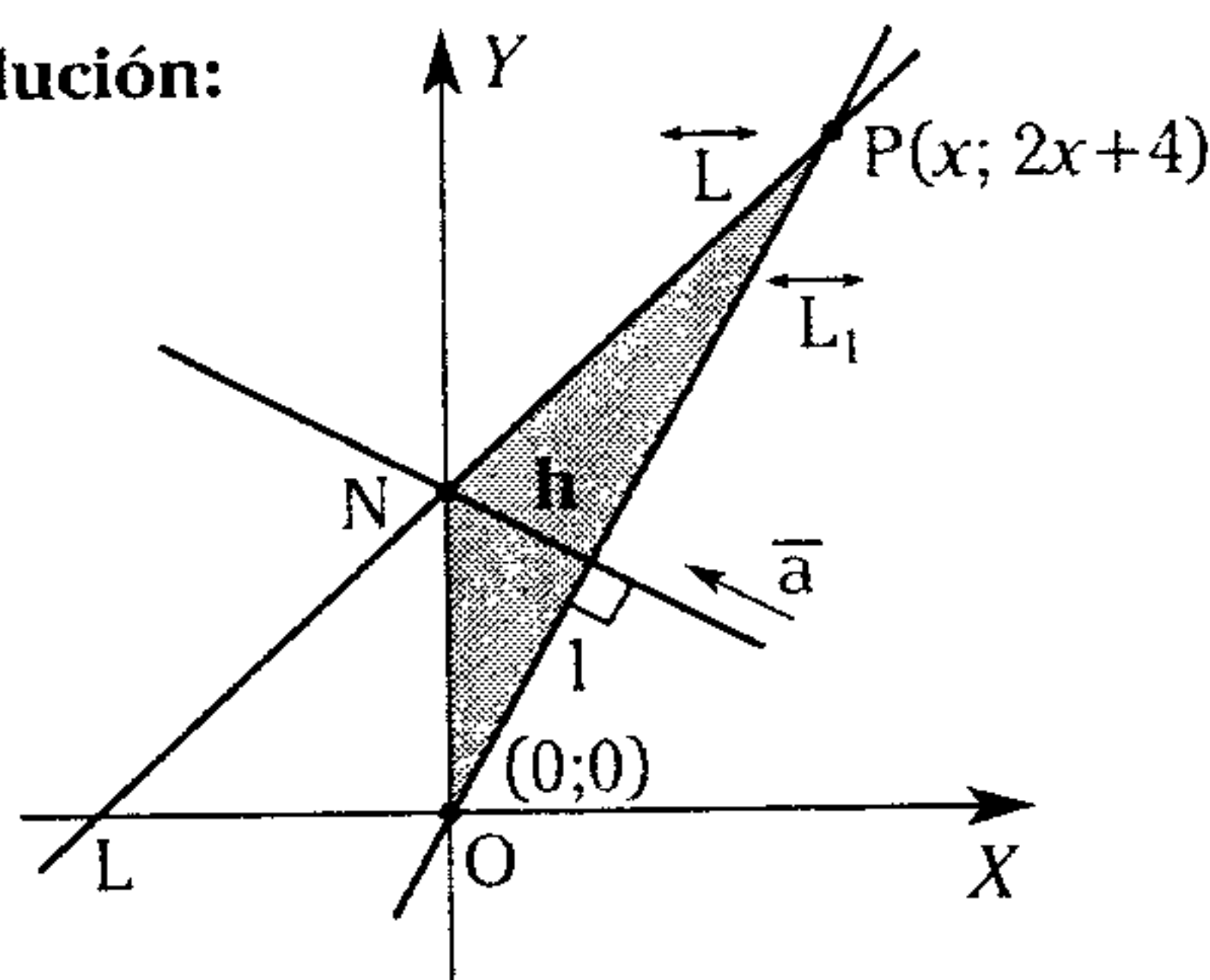
Tenemos $FR_1 = 3(3)^{3-1} = 27$

$$FR_2 = 4(2)^{4-1} = 32$$

$$L = \frac{1}{27} + \frac{1}{32} = \frac{59}{27 \times 32}$$

Problema 41

La recta $y=2x+4$ intercepta al eje de las ordenadas en el punto N, sea P otro punto de dicha recta y sea O el origen de coordenadas, de tal manera que el triángulo MOP tiene una altura h; respecto al vértice N, si la abscisa del punto P tiende ∞ , hallar el límite de h.

Resolución:

$\vec{L}: y=2x+4$ y \vec{L}_1 es la recta que pasa por el origen de coordenadas y contiene a P.

P: $(\vec{L} \cap \vec{L}_1)$ en el infinito

P: $(x; 2x+4)$; pendiente de $\vec{L}_1: m$

$m = \frac{2x+4}{x}$ vector dirección de \vec{L}_1

$\overrightarrow{OP} = (x, 2x+4)$ y $\vec{a} = \overrightarrow{OP}^\perp = (-2x-4; x)$ en el punto N=(0; 4)

El vector $\overrightarrow{PN} = N - P = (0, 4) - (x; 2x+4)$

$\overrightarrow{PN} = (-x; -2x)$

$$h = \left| \text{proy}_{\vec{a}} \overrightarrow{PN} \right| = \left| \frac{(-x; -2x) \cdot (-2x-4; x)}{\sqrt{(-2x-4)^2 + x^2}} \right|$$

$$h = \left| \frac{x(2x+4) - 2x^2}{\sqrt{(-2x-4)^2 + x^2}} \right| = \left| \frac{4x}{\sqrt{\left(2 + \frac{4}{x}\right)^2 + 1}} \right|$$

abscisa x tiende a ∞ y h tiende

$$\lim_{x \rightarrow \infty} h = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{\sqrt{\left(2 + \frac{4}{x}\right)^2 + 1}} = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

Problema 42

Calcular el $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)}$ donde $f(x_0)^{g(x_0)} = 1^\infty$

Si se sabe $\lim_{x \rightarrow x_0} (1+h(x))^{\frac{1}{h(x)}} = e$

$h(x_0) = 0$

Resolución:

Partimos

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \rightarrow x_0} [1 + (f(x) - 1)]^{g(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left\{ [1 + (f(x) - 1)]^{\frac{1}{f(x)-1}} \right\}^{(f(x)-1)g(x)} \end{aligned}$$

Como $f(x_0) = 1$

$$L = \lim_{x \rightarrow x_0} \left\{ [1 + (f(x) - 1)]^{\frac{1}{f(x)-1}} \right\}^{\lim_{x \rightarrow x_0} [(f(x)-1)g(x)]}$$

$$L = e^{\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)-1)g(x)}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)-1)g(x)}$$

Si $f(x_0)^{g(x_0)} = 1^\infty$

Problema 43

Calcular el

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x^3 - x^2 + x - 1} \right)^{2x}$$

Resolución:

$$L = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x^3 - x^2 + x - 1} - 1 \right) 2x \right]}$$

$$L = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x^2 + 2x)2x}{x^3 - x^2 + x - 1}}$$

$$L = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + 4x}{x^3 - x^2 + x - 1}}$$

$$L = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 + \frac{4}{x^2}}{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}}}$$

$$L = e^4$$

Problema 44

Calcular el límite $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$

Resolución:

Evalutando 1^∞

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x - 1) \frac{1}{x^2}}$$

$$L = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin^2 \left(\frac{x}{2} \right)}{x^2}}$$

$$L = e^{\frac{2}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin \left(\frac{x}{2} \right)}{\left(\frac{x}{2} \right)} \right]^2}$$

$$L = e^{\frac{1}{2}(1)^2} \Rightarrow L = e^{\frac{1}{2}}$$

Recordar: $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$

Problema 45

Calcular:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2 - 1)(n^2 - 2)(n^2 - 3) \dots (n^2 - n)}{(n^2 + 1)(n^2 + 2)(n^2 + 3) \dots (n^2 + n)}$$

Resolución:

Dividiendo el numerador y el denominador por

$$(n^2)^n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n^2 - 1)(n^2 - 2)(n^2 - 3) \dots (n^2 - n)}{(n^2)^n}}{\frac{(n^2 + 1)(n^2 + 2)(n^2 + 3) \dots (n^2 + n)}{(n^2)^n}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{n^2 - 1}{n^2} \right) \left(\frac{n^2 - 2}{n^2} \right) \left(\frac{n^2 - 3}{n^2} \right) \dots \left(\frac{n^2 - n}{n^2} \right)}{\left(\frac{n^2 + 1}{n^2} \right) \left(\frac{n^2 + 2}{n^2} \right) \left(\frac{n^2 + 3}{n^2} \right) \dots \left(\frac{n^2 + n}{n^2} \right)}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 - \frac{1}{n^2} \right) \left(1 - \frac{2}{n^2} \right) \left(1 - \frac{3}{n^2} \right) \dots \left(1 - \frac{n}{n^2} \right)}{\left(1 + \frac{1}{n^2} \right) \left(1 + \frac{2}{n^2} \right) \left(1 + \frac{3}{n^2} \right) \dots \left(1 + \frac{n}{n^2} \right)}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left[\left(1 - \frac{1}{n^2} \right)^{-n^2} \right]^{\frac{1}{n^2}} \left[\left(1 - \frac{2}{n^2} \right)^{-\frac{n^2}{2}} \right]^{\frac{2}{n^2}} \dots \left[\left(1 - \frac{n}{n^2} \right)^{-\frac{n^2}{n}} \right]^{\frac{n}{n^2}}}{\left[\left(1 + \frac{1}{n^2} \right)^{n^2} \right]^{\frac{1}{n^2}} \left[\left(1 + \frac{2}{n^2} \right)^{\frac{n^2}{2}} \right]^{\frac{2}{n^2}} \dots \left[\left(1 + \frac{n}{n^2} \right)^{\frac{n^2}{n}} \right]^{\frac{n}{n^2}}}$$

TEOREMA

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x} \right)^x = e^k ; 2 < e < 3 ; \forall k \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Luego, tenemos para el problema:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{1}{n^2}} e^{\frac{2}{n^2}} \dots e^{\frac{n}{n^2}}}{e^{\frac{1}{n^2}} e^{\frac{2}{n^2}} \dots e^{\frac{n}{n^2}}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{-\left(\frac{1+2+3+\dots+n}{n^2} \right)}}{e^{\left(\frac{1+2+3+\dots+n}{n^2} \right)}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{-\frac{n(n+1)}{2n^2}}}{e^{\frac{n(n+1)}{2n^2}}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\frac{n(n+1)}{n^2}} = e^{-\frac{n^2-n}{n^2}} = e^{-1}$$

Problema 46

Calcular $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n^n)}{\ln(n!)}$

Resolución:

Aplicando la fórmula de Stirling:

$$n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n^n)}{\ln(n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n})}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln n}{n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln 2\pi + \frac{1}{2} \ln(n)}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{\ln n} + \frac{\ln 2\pi}{2n \ln(n)} + \frac{1}{2n}}$$

Evaluando tenemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1-0+0+0} = 1$$

Problema 47

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[5]{\frac{512n^5 - 16}{16n^5 - 512}} \sqrt[3]{\left(\frac{n^3+1}{n^3-n}\right)^{3n^2+1}}$$

Resolución:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[5]{\left(\frac{512n^5 - 16}{16n^5 - 512}\right)} \sqrt[3]{\left(\frac{n^3+1}{n^3-n}\right)^{3n^2+1}}$$

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[5]{\left(\frac{512n^5 - 16}{16n^5 - 512}\right)} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\left(\frac{n^3+1}{n^3-n}\right)^{3n^2+1}}$$

$$L = \sqrt[5]{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{512n^5 - 16}{16n^5 - 512}\right)} \underbrace{\left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3+1}{n^3-n}\right)^{3n^2+1} \right]}_{L_1}$$

$$L = \sqrt[5]{\frac{512}{16}} \sqrt[3]{L_1} = 2 \sqrt[3]{L_1}$$

Recordar:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x)^{G(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} G(x)(F(x)-1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x)^{G(x)} = 1^\infty$$

Luego, hallando L_1

$$L_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3+1}{n^3-n}\right)^{3n^2+1} \text{ forma } 1^\infty$$

$$L_1 = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} (3n^2+1) \left(\frac{n^3+1}{n^3-n} - 1\right)}$$

$$L_1 = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(3n^2+1)}{(n^3-n)}}$$

$$L_1 = e^3$$

$$\text{Luego, } L = 2 \sqrt[3]{e^3} = 2e$$

Problema 48

$$\text{Si } \lim_{a \rightarrow b} \frac{f(a+x)}{\sqrt{a+x} - \sqrt{b+x}} = 12\sqrt{b+x}$$

$$\text{y } \lim_{a \rightarrow b} \frac{g(a+x)}{\sqrt[3]{b+x} - \sqrt[3]{a+x}} = 9\sqrt[3]{(b+x)^2}$$

$$\text{Hallar } \lim_{a \rightarrow 0} \frac{f(a+b+x)}{g(a+b+x)}$$

Resolución:

Haciendo un cambio de variable:

$$a-b=h \Rightarrow \text{Si } a \rightarrow b \Rightarrow h \rightarrow 0$$

$$a=b+h$$

\Rightarrow se tiene que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h+b+x)}{\sqrt{h+b+x} - \sqrt{b+x}} = 12\sqrt{b+x}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h+b+x)}{\sqrt[3]{b+x} - \sqrt[3]{h+b+x}} = 9\sqrt[3]{(b+x)^2}$$

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h+b+x)(\sqrt[3]{b+x} - \sqrt[3]{h+b+x})}{g(h+b+x)(\sqrt{h+b+x} - \sqrt{b+x})}$$

$$= \frac{12(b+x)^{1/2}}{9(b+x)^{2/3}} \dots (1)$$

$$\text{Sea: } b+x=m^3 \text{ y } h+b+x=n^3$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt[3]{b+x} - \sqrt[3]{h+b+x}}{\sqrt{h+b+x} - \sqrt{b+x}} = \frac{m-n}{n^{3/2} - m^{3/2}}$$

$$= \frac{-(n-m)(n^{3/2} + m^{3/2})}{(n^{3/2} - m^{3/2})(n^{3/2} + m^{3/2})} = \frac{-(n-m)(n^{3/2} + m^{3/2})}{(n-m)(n^2 + nm + m^2)}$$

Reemplazando en (1)

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h+b+x)(\sqrt{h+b+x} - \sqrt{b+x})(-1)}{g(h+b+x)(\sqrt[3]{(h+b+x)^2} + \sqrt[3]{(h+b+x)(b+x)} + \sqrt[3]{(b+x)})}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h+b+x)(-1)2\sqrt{b+x}}{g(h+b+x)3\sqrt[3]{(b+x)^2}} = \frac{4}{3} \frac{\sqrt{b+x}}{\sqrt[3]{(b+x)^2}}$$

$$\therefore \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h+b+x)}{g(h+b+x)} = -2$$

Problema 49

Calcular $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+z^2} - \sqrt[4]{1-2z}}{z^2 + z}$

Resolución:

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+z^2} - \sqrt[4]{1-2z}}{z^2 + z} &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[3]{1+z^2} - 1) + (1 - \sqrt[4]{1-2z})}{z} \cdot \frac{1}{(1+z)} \\ &= \left(\lim_{z \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[3]{1+z^2} - 1)}{z} + \lim_{z \rightarrow 0} \frac{(1 - \sqrt[4]{1-2z})}{z} \right) \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{(1+z)} \\ &\quad \dots (*) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} * \quad \lim_{z \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[3]{1+z^2} - 1)(\sqrt[3]{(1+z^2)^2} + \sqrt[3]{1+z^2} + 1)}{z(\sqrt[3]{(1+z^2)^2} + \sqrt[3]{1+z^2} + 1)} \\ = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^2}{z(a)} \end{aligned}$$

$$= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{a} = \frac{0}{3} = 0 \quad \dots (1)$$

$$\begin{aligned} * \quad \lim_{z \rightarrow 0} \frac{(1 - \sqrt[4]{1-2z})(1 + \sqrt[4]{1-2z})(1 + \sqrt{1-2z})}{z(1 + \sqrt[4]{1-2z})(1 + \sqrt{1-2z})} \\ \lim_{z \rightarrow 0} \frac{2\cancel{z}}{\cancel{z}(1 + \sqrt[4]{1-2z})(1 + \sqrt{1-2z})} = \frac{1}{2} \quad \dots (2) \end{aligned}$$

Por lo tanto de (1) y (2) en (*):

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+z^2} - \sqrt[4]{1-2z}}{z^2 + z} = \left(0 + \frac{1}{2}\right) \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z+1} = \frac{1}{2}$$

Problema 50

Si $a, b \in \mathbb{R}^+$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} ax \sin\left(\frac{a}{x}\right) = b-1$ y

$$A = \{x \in \mathbb{R} : ax + b > x^2\}$$

$$\sup A = a + b$$

Hallar $a^2 + b^2$

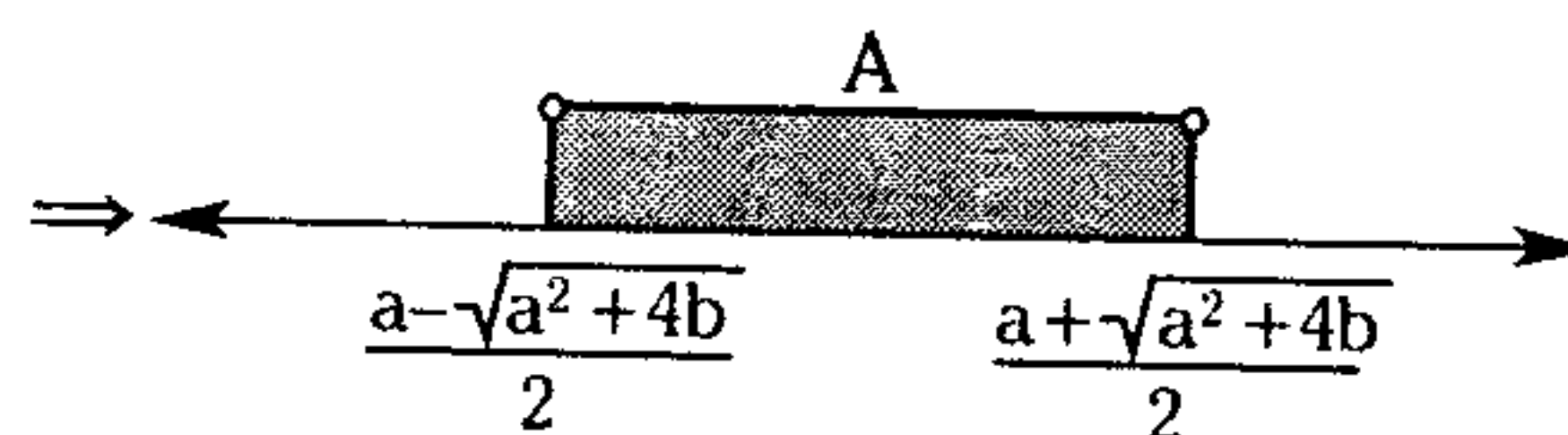
Resolución:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} ax \sin\left(\frac{a}{x}\right) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{a^2 \sin(z)}{z}$$

$$= a^2 = b-1 \Rightarrow b \geq 1$$

De A se tiene $x^2 - ax - b < 0$

$$\Rightarrow x_{12} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 4b}}{2}$$



$$\therefore \sup A = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4b}}{2} = a + b$$

$$\therefore a + 2b = \sqrt{a^2 + 4b}$$

$$\Rightarrow a^2 + 4ab + 4b^2 = a^2 + 4b$$

$$b(a+b-1)=0$$

Como $b \geq 1 \Rightarrow a+b-1=0$

Además, $b-1=a^2=-a \Rightarrow a+a^2=0$

$$\therefore a=0 \vee a=-1$$

$$\Rightarrow (a=0 \wedge b=1) \vee (a=-1 \wedge b=2)$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 1 \vee a^2 + b^2 = 5$$

Problema 51

Evaluar $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \sin x!}{x^2}$

Resolución:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2} \sin x! = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \sin x!$$

$$= \underbrace{\left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \right)}_0 \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x! \right) = 0$$

Tener en cuenta que:

$$-1 \leq \sin x! \leq 1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \sin x!}{x^2} = 0$$

Problemas Propuestos

1. Dado:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x \lfloor (\sqrt{9-x}) \rfloor^2}{x+2}; & x \geq 1 \\ \frac{x+3}{2x+1}; & 0 < x < 1 \end{cases}$$

Halle el límite $f(x)$; $x \rightarrow 1$

- A) $4/3$ B) 1 C) -1
D) $-4/3$ E) 5

2. Halle: (ab) si se cumple

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} - ax - b) = 0$$

- A) $-1/2$ B) $1/2$ C) 1
D) -1 E) 0

3. En qué punto la función $f(x) = \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$ no tiene o no existe límite

- A) \mathbb{R} B) \mathbb{Z} C) \mathbb{Q}
D) \mathbb{N} E) $\{1; 2\}$

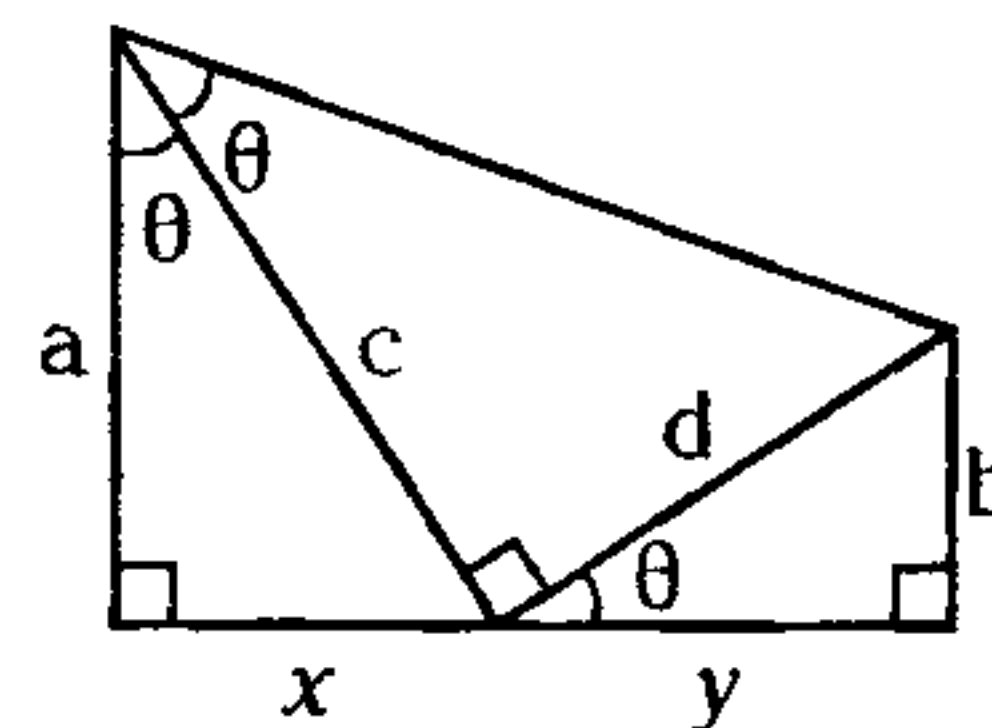
4. Halle A y B de modo que la función

$$f(x) = \begin{cases} -2\sin x; & x \leq -\frac{\pi}{2} \\ A\sin x + B; & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ \cos x; & x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

sea continuo en todo \mathbb{R}

- A) -1 y 1 B) 1 y 2 C) 0 y 2
D) 2 y 3 E) 0 y 3

5. De la figura:



Calcule $\lim_{a \rightarrow b} \frac{a-b}{c-d}$

- A) 1 B) 0 C) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$
D) $\sqrt{2}$ E) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

6. Calcular

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1+9n^2}} \left(\frac{5n^2}{4+n} + \frac{2}{4} + \frac{4}{7} + \dots + \frac{2n}{3n+1} \right)$$

- A) $\frac{3}{2}$ B) $\frac{17}{9}$ C) -1
D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{1}{2}$

7. Calcule

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n \left(\frac{\ln(4n)}{\ln(10n)} \right) \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{8}{5} \cdot \frac{13}{8} \dots \frac{5n-2}{3n-1} \right)}$$

- A) 1 B) -1 C) $\frac{5}{3}$
D) 2 E) $\frac{1}{2}$

8. Calcule $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\lfloor x \rfloor^2 - x^2}{\lfloor x \rfloor - x}$

- A) 0 B) 2 C) \nexists
D) 1 E) 3

9. Calcule:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{2}{x} \right)^{3x^2}$$

- A) -1 B) 0 C) e
D) 1 E) e^{-6}

10. Halle $\lim_{n \rightarrow 1} x_n$ si x_n es igual a:

$$\frac{1}{n(\sqrt{n^2-1}-n)}$$

- A) 1 B) -2 C) 0
D) -1 E) 2

11. Halle $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ si x_n es igual a

$$\frac{\sqrt{n^2+1}-n}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$$

- A) 0 B) 1 C) -1
D) 2 E) -2

12. Halle $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ si x_n es igual a

$$\frac{2n - \sqrt{4n^2-1}}{\sqrt{n^2+3}-n}$$

- A) -1/2 B) 1 C) 1/6
D) 1/2 E) -1

13. Halle $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ si x_n es igual a:

$$\frac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n^2+n}-n-1}$$

- A) 1/2 B) n C) 1
D) n^2 E) 0

14. Halle $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ si x_n es igual a:

$$\frac{\sqrt{n^2+1}-n}{\sqrt{n^3+1}-n\sqrt{n}}$$

- A) 0 B) $-\infty$ C) $+\infty$
D) 1 E) n

15. Halle $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ si x_n es igual a:

$$\frac{\sqrt[3]{n}-\sqrt[3]{n+1}}{\sqrt[4]{n+1}-\sqrt[4]{n}}$$

- A) $-\infty$ B) ∞ C) 1
D) n E) -1

16. Halle $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ si x_n es igual a:

$$\frac{\sqrt[4]{n^3+n}-\sqrt{n}}{n+2+\sqrt{n+1}}$$

- A) 1 B) n C) -1
D) 0 E) 2

17. Halle $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ si x_n es igual a:

$$\frac{n^2+3n-2}{1+2+\dots+n}$$

- A) 2 B) 1 C) -1
D) n E) -2

18. Halle $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ si x_n es igual a:

$$\frac{1+3+5+\dots+(2n-1)}{n^3}$$

- A) 1 B) 0 C) -1
D) n E) -n

19. Halle $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ si x_n es igual a:

$$\sqrt[n]{3^n-2^n}$$

- A) 1 B) \sqrt{n} C) $\frac{\sqrt{n}}{2}$
D) 3 E) -2

20. Halle $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, si x_n es igual a :

$$\sqrt[n]{\frac{2n^3+1}{3n^3-2}}$$

- A) 0 B) 1 C) $\sqrt{2}$
D) $\frac{1}{2}$ E) 2

21. Halle $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ si x_n es igual a:

$$\sqrt[n]{a^n + b^n}, a > 0, b > 0$$

- A) $\{a; b\}$ B) \sqrt{n} C) n^n
D) $\max \{a; b\}$ E) -1

22. Halle $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ si x_n es igual a:

$$\frac{\sqrt[n]{8}-1}{\sqrt[n]{16}-1}$$

- A) 3/4 B) 1/2 C) $\sqrt{2}$
D) 1 E) n

23. Halle $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ si x_n es igual a:

$$\frac{3\sqrt[3]{16}-4\sqrt[3]{8}+1}{(\sqrt[3]{2}-1)^2}$$

- A) 0 B) 1 C) 2
D) -1 E) 6

24. Halle $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ si x_n es igual a:

$$\frac{3}{1-\sqrt[n]{8}} - \frac{5}{1-\sqrt[n]{32}}$$

- A) 1 B) 0 C) 1/2
D) -1 E) 2

25. Halle $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ si x_n es igual a:

$$\frac{\sqrt[n]{a^m}-1}{\sqrt[n]{a^k}-1}, a > 1, k, m \in \mathbb{N}$$

- A) $\frac{m}{k}$ B) m C) k
D) $-\frac{m}{k}$ E) 1

26. Halle $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n$

- A) n B) $\frac{1}{2}$ C) 1
D) 0 E) -1

27. Halle $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n$

- A) 1 B) 0 C) -1
D) n E) n^2

28. Halle $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\sqrt{n}}$

- A) \sqrt{n} B) 1 C) 0
D) -1 E) $\frac{1}{2}$

29. Halle $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ si x_n es igual a:

$$\sqrt[n]{n+a}$$

- A) -1 B) \sqrt{n} C) \sqrt{a}
D) 1 E) 0

30. Halle $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ si x_n es igual a:

$$\sqrt[n]{an+b}; a, b \in \mathbb{R}^+$$

- A) -1 B) \sqrt{n} C) 1
D) 0 E) 2

31. Halle $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ si x_n es igual a:

$$\sqrt[n]{n^3 - 3n + 1}$$

- A) 1 B) -2 C) \sqrt{n}
D) n E) -1

32. Halle $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ si x_n es igual a:

$$\sqrt[2n]{n^2 - 1}$$

- A) 0 B) \sqrt{n} C) $\sqrt{1}$
D) 1 E) n

33. Halle $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ si x_n es igual a:

$$\sqrt[n]{2^n n^2 + 2n - 1}$$

- A) 0 B) -1 C) 2
D) n E) 1

34. Halle $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ si x_n es igual a:

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n} - \frac{1}{2^n}}$$

- A) 1 B) $\frac{\sqrt{1}}{n}$ C) \sqrt{n}
D) n E) -8

35. Halle $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ si x_n es igual a:

$$\frac{\sqrt[n]{n^4} + 2\sqrt[n]{n^2} - 3}{\sqrt[n]{n^2} - 3\sqrt[n]{n} + 2}$$

- A) -1 B) $\sqrt{2}$ C) -4
D) \sqrt{n} E) -8

36. Halle $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ si x_n es igual a:

$$\sqrt[3n]{\frac{n^4 - 2n + 3}{n^2 + 1}}$$

- A) 0 B) \sqrt{n} C) $\sqrt[3]{1}$
D) 1 E) -1

37. Halle $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ si x_n es igual a:

$$\sqrt[n^2]{\frac{n-1}{n+1}} + \sqrt[n]{3^n + n^3 + 2}$$

- A) 2 B) 4 C) -1
D) n^3 E) $-\frac{1}{2}$

38. Halle $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ si x_n es igual a:

$$\left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)^n$$

- A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{n}$ C) 1
D) n E) $-\frac{1}{2}$

39. Halle $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ si x_n es igual a:

$$\left(\frac{2^n + 3}{2^n + 1}\right)^n$$

- A) $\left(\frac{n}{2} + \frac{1}{3}\right)$ B) $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ C) $\frac{2^n}{3}$
D) $\frac{1}{2}$ E) 1

40. Halle $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ si x_n es igual a:

$$\left(\frac{n^2 + 1}{n^2 - 2} \right)^{n^2}$$

- A) e^3 B) n^2 C) e
D) 1 E) 0

41. Halle $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ si x_n es igual a:

$$\left(\frac{n^2 + n}{n^2 + 2n + 2} \right)^n$$

- A) $\frac{1}{e}$ B) e C) $\frac{1}{e^2}$
D) $-e$ E) $-\frac{1}{e}$

42. Halle $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ si x_n es igual a:

$$\left(\frac{n^2 - n + 1}{n^2 + n + 1} \right)^n$$

- A) $\frac{1}{e}$ B) e C) $\frac{1}{e^2}$
D) $-e$ E) $-\frac{1}{e}$

43. Evalúe

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + 2b^x + 3c^x}{6} \right)^{\frac{1}{x}}$$

- A) $\sqrt[6]{abc}$ B) abc
C) $\sqrt[6]{ab^2c^3}$
D) $6abc$ E) 0

44. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x + 1 - \cos x}$

- A) $\sqrt[n]{a}$ B) a^n C) a
D) na E) 1

45. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(\ln x)^2}{\ln x + 1}$

- A) $\frac{1}{2}$ B) 0 C) 1
D) 2 E) 4

46. Halle el mayor valor de C de modo que:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{nx^{c-1} + 7x^c}{\sqrt[n]{7^n x^n + n}} = L \text{ sea finito y calcule el}$$

límite

- A) $C=1, L=2$
B) $C=1, L=1$
C) $C=2, L=1$
D) $C=1, L=7$
E) $C=2, L=n+1$

47. Calcule $\lim_{x \rightarrow n} \frac{n \sin x - x \sin n}{n \cos x - x \cos n}$

Si existe

- A) $\sin n$
B) $(\sin n - n \cos n) / (\cos n + n \sin n)$
C) $(n \sin n - \cos n) / (n \cos n + \sin n)$
D) $(n \sin n - \cos n) / (n \cos n + \sin n)$
E) no existe

48. Si $a, b \in \mathbb{R}$; halle:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a \sin 2x + b \cos x^2}{1 + x^2} ; \text{ si existe}$$

- A) $a+b$ B) 1 C) 0
D) No existe E) a

49. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2 + 2)(n^2 + 4)(n^2 + 6) \dots (n^2 + 2n)}{(n^2 - 1)(n^2 - 3)(n^2 - 5) \dots (n^2 - 2n + 1)}$

- A) $e^{3/2}$ B) 1 C) e^2
D) e^4 E) $e^{-3/2}$

50. Sabiendo que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{an^3 + bn^2 + cn + d}{2n^3 - n^2 - 5n - 2} \right)^{(n-2)}$

es "e" ("e" base ln) halle a+b

- A) 3 B) 1 C) -1
D) -3 E) -2

51. La longitud de una circunferencia en la geometría de Lovachesky se calcula por:

$$f(R) = \pi R \left(e^{\frac{\pi R}{K}} + e^{-\frac{\pi R}{K}} \right) \text{ donde } K; R \in \mathbb{R}^+.$$

Para pasar a la geometría euclídeana $K \rightarrow \infty$. Luego halle $f(2)$ en la geometría euclídeana.

- A) $4\pi\mu$ B) $2\pi\mu$ C) $\pi\mu$
D) $6\pi\mu$ E) $8\pi\mu$

52. Calcule $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x + \sqrt[3]{1 - x^3} \right)$

- A) 1 B) 2 C) -1
D) 0 E) -2

53. Calcule $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + 3 + \dots + n}{n^2}$

- A) $1/4$ B) $1/3$ C) $1/2$
D) $-1/2$ E) $-1/4$

54. Calcule $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 9} \right]$

- A) $-1/3$ B) $1/2$ C) 1
D) 0 E) -1

55. Calcule

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4 + x + x^2} - x}{x^2}$$

- A) 1 B) -1 C) 0
D) $\frac{1}{2}$ E) $-\frac{1}{2}$

56. Calcule

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 4(x\sqrt{x^2 + 1} - x^2)$$

- A) -2 B) 2 C) 0
D) 1 E) -1

57. Calcule

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x^2 - 1}$$

- A) 7 B) 0 C) 1
D) 2 E) -1

58. Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{9 + x^2}$

- A) 1 B) 2 C) 3
D) -1 E) 0

59. Calcule

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left| \frac{x^3 - x^2 + 3x - 3}{x - 1} \right|$$

- A) -3 B) -2 C) 0
D) 4 E) -4

60. Calcular

$$\lim_{n \rightarrow 2} \left[\frac{n^2 - 2^n}{n - 2} - 4 \right]$$

- A) $-4 \ln 2$ B) 0 C) 1
D) 2 E) $\ln 2$

1 **A**

2 **B**

3 **B**

4 **A**

5 **D**

6 **B**

7 **C**

8 **C**

9 **E**

10 **D**

11 **A**

12 **C**

13 **E**

14 **C**

15 **A**

16 **D**

17 **A**

18 **B**

19 **D**

20 **B**

21 **D**

22 **A**

23 **E**

24 **D**

25 **A**

26 **C**

27 **A**

28 **B**

29 **D**

30 **C**

31 **A**

32 **D**

33 **C**

34 **A**

35 **C**

36 **D**

37 **B**

38 **C**

39 **E**

40 **A**

41 **A**

42 **C**

43 **C**

44 **E**

45 **E**

46 **B**

47 **B**

48 **C**

49 **B**

50 **A**

51 **A**

52 **D**

53 **C**

54 **B**

55 **C**

56 **C**

57 **B**

58 **C**

59 **D**

60 **A**

Claves